СЕНТЯБРЬ/ДЕКАБРЬ
ISSN 0130-2221
2012 · №5-6

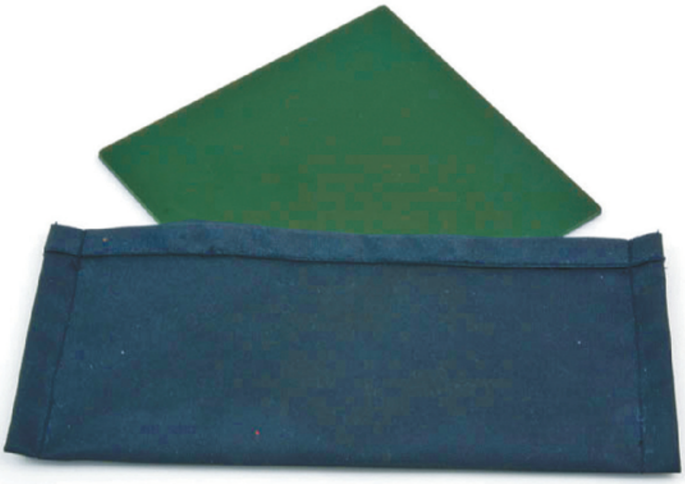
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

КВАДРАТ В КОНВЕРТЕ

Эта головоломка состоит всего из двух частей: квадратной пластинки и прямоугольного конвертика. Ваша задача – полностью упаковать пластинку в конверт. При этом нельзя гнуть пластинку или еще как-нибудь ее деформировать. Да и вообще, применять большую силу в этой головоломке не нужно. Решение состоит из двух этапов. Сначала придется понять, какую форму придать конвертику. А затем – упаковать в него пластинку. Предостережем вас, что основная сложность головоломки заключена именно в этом, поскольку размеры частей здесь подобраны очень точно. Будь конвертик хоть немного меньше, пластинка в него ни за что не поместилась бы.

(Продолжение – на странице 36 внутри журнала)



КВАНТ СЕНТЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2012 № 5-6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

К открытию бозона Хиггса

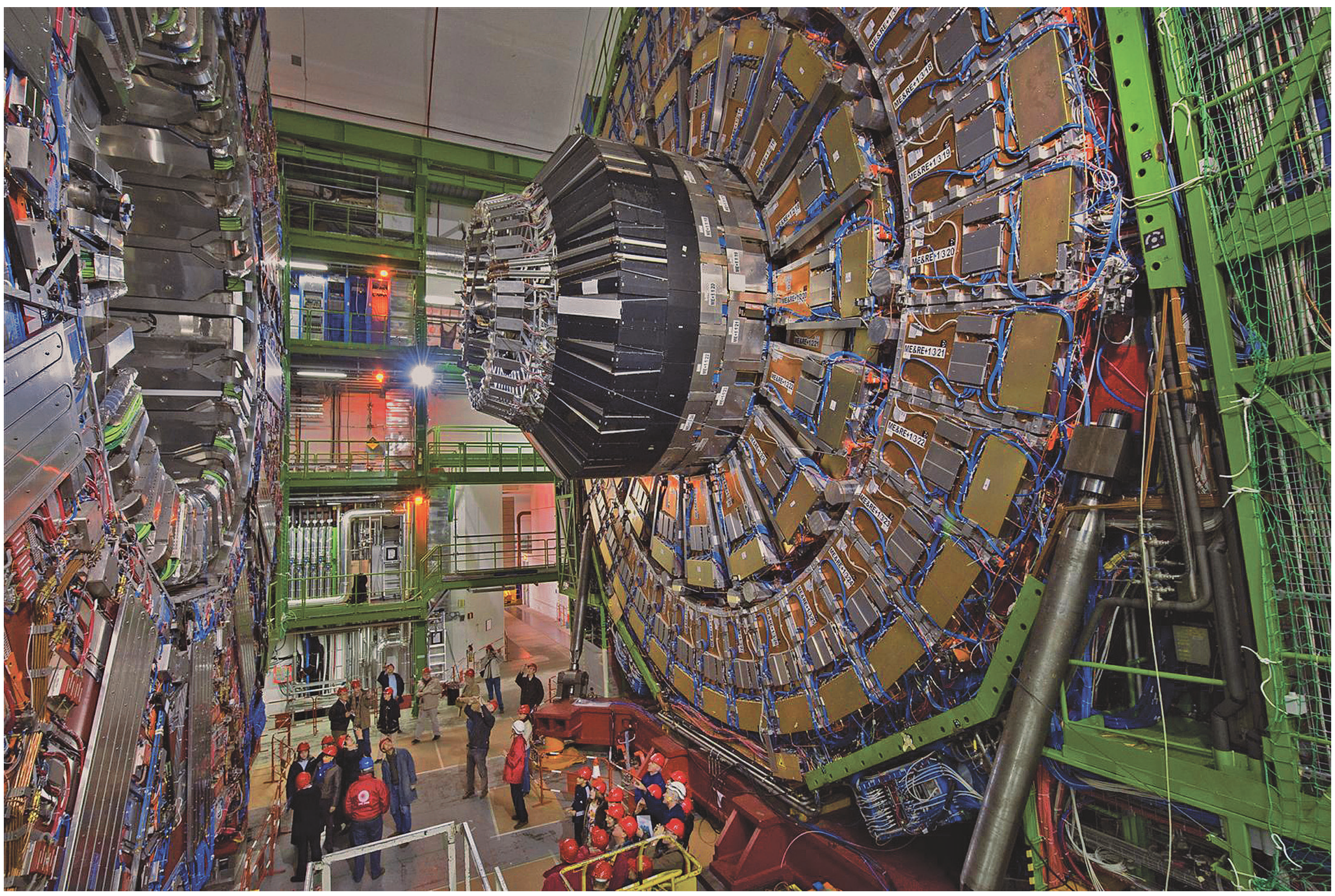
В.РУБАКОВ

Четвертого июля 2012 года произошло событие, имеющее выдающееся значение для современной физики: в ЦЕРНе – Европейском центре ядерных исследований – было объявлено об открытии новой частицы, свойства которой, как осторожно заявляют авторы открытия, соответствуют ожидаемым свойствам теоретически предсказанного элементарного бозона Стандартной модели физики частиц. Следуя распространенной терминологии, этот бозон часто называют бозоном Хиггса, хотя это название не вполне адекватно. Как бы то ни было, речь идет об открытии одного из центральных объектов фундаментальной физики, не имеющего аналогов среди известных элементарных частиц и занимающего уникальное место в физической картине мира.

Первые указания на существование нового бозона были получены еще в декабре 2011 года в экспериментах, выполняемых на Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе. Кроме того, незадолго до объявления об открытии появилось сообщение о том, что данные, полученные на протон-антипротонном коллайдере Tevatron (США), также указывают на существование нового бозона. Всего этого было недостаточно для того, чтобы можно было говорить об открытии, но с декабря количество данных, набранных на Большом адронном коллайдере, удвоилось и, кроме того, были усовершенствованы методы их обработки. Результат оказался впечатляющим: в каждом из экспериментов статистическая достоверность сигнала достигла уровня, который в физике элементарных частиц считается уровнем открытия.

Что представляет собой новая частица

Прежде всего скажем, что минимальная версия теории микромира носит неуклюжее название Стандартной модели. Эта теория описывает все известные элементарные частицы и все известные взаимодействия



Большой адронный коллайдер

между ними.[1] Бозон Хиггса был единственным не открытым до последнего времени элементом Стандартной модели.

Мы назвали эту модель минимальной именно потому, что других элементарных частиц в ней нет. В частности, в ней имеется один и только один бозон Хиггса, и он является элементарной, а не составной частицей. Большинство аспектов Стандартной модели, за исключением той ее части, которой принадлежит бозон Хиггса, проверены в многочисленных экспериментах, и главная задача Большого адронного коллайдера – выяснить, действительно ли в природе реализуется минимальный вариант теории и насколько полно эта теория описывает микромир.[2]

Вполне естественно, что программа поиска бозона Хиггса была с самого начала одной из главных, если не самой главной, на Большом адронном коллайдере. В ходе выполнения этой программы и была открыта новая частица. Она довольно тяжелая по меркам физики микромира. В этой области науки массу измеряют в единицах энергии, имея в виду связь $E = mc^2$ между массой и энергией покоя. В качестве единицы энергии используют электронвольт (эВ) – энергию, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов 1 вольт, и производные единицы – МэВ (миллион электронвольт, 10^6 эВ), ГэВ (миллиард электронвольт, 10^9 эВ), ТэВ (триллион электронвольт, 10^{12} эВ). Масса электрона в этих единицах равна 0,5 МэВ, протона – примерно 1 ГэВ, масса самой тяжелой известной элементарной частицы, t-кварка, – 173 ГэВ. Так вот, масса новой частицы составляет 125–126 ГэВ (неопределенность связана с погрешностью измерений).

Эта новая частица, назовем ее H, не имеет электрического заряда. Она нестабильна и может распадаться по-разному. На Большом адронном коллайдере ее открыли, изучая распады в два фотона: $H \to \gamma\gamma$ и в две пары электрон-позитрон и/или мюон-антимюон: $H \to e^+e^-e^+e^-$, $H \to e^+e^-\mu^+\mu^-$, $H \to \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$. Второй тип процессов записывают как $H \to 4l$, где l обозначает одну из частиц e^+, e^-, μ^+ или μ^- – их коллективно называют лептонами. Имеются также сообщения о некотором избытке событий, который можно объяснить распадами $H \to 2l2\nu$, где ν – нейтрино. Этот избыток, впрочем, пока не имеет высокой статистической достоверности.

Напомним, что элементарные частицы могут обладать спином – внутренним угловым моментом. Спин частицы может быть целым, включая ноль, или полуцелым в единицах постоянной Планка $\hbar$. Частицы с целым и полуцелым спином называются бозонами и фермионами соответственно. Все известные до последнего времени элементарные частицы имеют ненулевой спин; так, спин электрона равен 1/2, а спин фотона равен 1. Из существования обсуждавшихся распадов следует, что спин новой частицы целый – она является бозоном. Кроме того, ее спин не может быть равным единице – частица со спином 1 не может распадаться на два фотона. Остается спин 0, 2 или выше. Хотя прямого экспериментального измерения спина новой частицы пока нет, крайне маловероятно, что мы имеем дело с частицей со спином 2 или больше. Почти наверняка спин H равен нулю. Как мы увидим, именно таким должен быть бозон Хиггса.

Вообще все, что сейчас известно о новой частице, согласуется с ее интерпретацией как бозона Хиггса, предсказанного Стандартной моделью макромира. В рамках этой модели можно вычислить как вероятность рождения бозона Хиггса в протон-протонных столкновениях, так и вероятности его распадов – и тем самым предсказать число ожидаемых событий. Эти предсказания и подтверждаются экспериментом, конечно в пределах экспериментальных погрешностей. Эти погрешности пока велики, да и измеренных величин пока совсем немного. Тем не менее, трудно сомневаться в том, что открыт именно бозон Хиггса или что-то очень похожее на него. Особенно, если учесть, что распады $H \to \gamma\gamma$ и $H \to 4l$ должны быть очень редкими: на два фотона распадается 2 из 1000 бозонов Хиггса, а на две e^+e^- и/или $\mu^+\mu^-$ пары – 1 из 10000.

Более чем в половине случаев бозон Хиггса должен распадаться на пару b-кварк–b-антикварк: $H \to b\tilde{b}$. Рождение пары $b\tilde{b}$ в протон-протонных (и протон-антипротонных) столкновениях – явление очень частое и без всякого бозона Хиггса, и выделить сигнал от бозона Хиггса из этого «шума» (физики говорят «фона») в экспериментах на Большом адронном коллайдере пока не удалось.

Заканчивая описание известных свойств новой частицы, скажем, что живет она довольно долго по меркам физики микромира. На основе имеющихся экспериментальных данных можно получить оценку снизу на ее время жизни: $\tau_H \geq 10^{-24}$ с, что не противоречит предсказанию Стандартной модели: $\tau_H = 1{,}6 \cdot 10^{-22}$ с. Для сравнения, время жизни t-кварка составляет $\tau_t = 3 \cdot 10^{-25}$ с. Отметим, что прямое измерение времени жизни новой частицы на Большом адронном коллайдере вряд ли возможно.

Зачем нужен новый бозон?

В квантовой физике каждая элементарная частица является квантом некоторого поля и, наоборот, каждому полю соответствует своя частица-квант. Наиболее известный пример: электромагнитное поле и его квант фотон. Поэтому вопрос, поставленный в заглавии этого раздела, можно переформулировать так: зачем нужно новое поле и каковы его ожидаемые свойства?

Краткий ответ состоит в том, что симметрии теории микромира – будь то Стандартная модель или какая-то более сложная теория – запрещают элементарным частицам иметь массы, а новое поле нарушает эти

[1] Гравитационное взаимодействие стоит особняком: независимо от того, какие бывают элементарные частицы, оно описывается общей теорией относительности Эйнштейна.

[2] Стандартная модель на самом деле заведомо неполна, но это предмет отдельного разговора. Отметим только, что о ее неполноте свидетельствуют данные космологии – науки о Вселенной. Проявится ли неполнота Стандартной модели при энергиях Большого адронного коллайдера – открытый и интригующий вопрос.

симметрии и обеспечивает существование масс частиц.

Рассмотрим, хотя бы в общих чертах, роли симметрий в физике микромира.

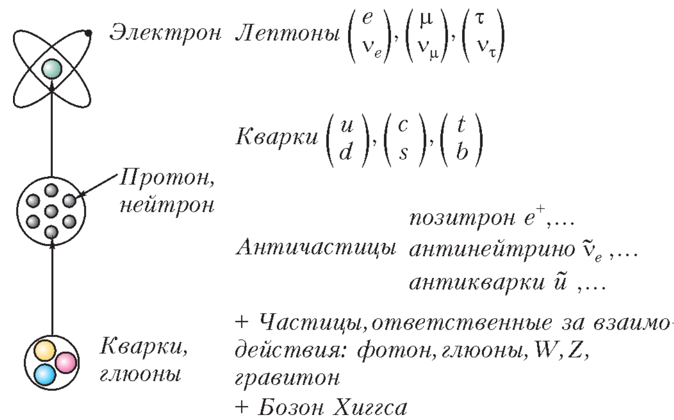
Симметрии, законы сохранения и запреты. Общим свойством физических теорий, будь то ньютонова механика, механика специальной теории относительности, квантовая механика или теория микромира, является то, что каждой симметрии соответствует свой закон сохранения. Например, симметрии относительно сдвигов во времени (т.е. тому обстоятельству, что законы физики одинаковы в каждый момент времени) соответствует закон сохранения энергии, симметрии относительно сдвигов в пространстве – закон сохранения импульса, а симметрии относительно поворотов в пространстве (все направления в пространстве равноправны) – закон сохранения углового момента. Законы сохранения можно интерпретировать и как запреты: перечисленные симметрии запрещают изменение энергии, изменение импульса и изменение углового момента замкнутой системы при ее эволюции.

Наоборот, каждому закону сохранения соответствует своя симметрия; это утверждение является точным в квантовой теории. Спрашивается, какая же симметрия соответствует закону сохранения электрического заряда? Ясно, что симметрии пространства и времени здесь ни при чем. Тем не менее, необходимая симметрия имеется. Дело в том, что помимо очевидных пространственно-временны́х симметрий существуют неочевидные, «внутренние» симметрии. Одна из них и приводит к сохранению электрического заряда. Для нас важно, что эта же внутренняя симметрия (только понимаемая в расширенном смысле – физики употребляют термин «калибровочная инвариантность») объясняет и тот факт, что у фотона нет массы. Отсутствие массы у фотона в свою очередь тесно связано с тем, что у света могут быть только два типа поляризации – левая и правая.

Чтобы пояснить эту связь между наличием только двух типов поляризации света и отсутствием массы у фотона, отвлечемся на время от разговора о симметриях и снова напомним, что элементарные частицы характеризуются спином, который может быть полуцелым или целым (в единицах постоянной Планка). Элементарные фермионы (частицы с полуцелым спином) имеют спин $1/2$. Это электрон e, электронное нейтрино ν_e, тяжелые аналоги электрона – мюон μ и τ-лептон, их нейтрино ν_μ и ν_τ, кварки шести типов u, d, c, s, t, b и соответствующие всем им античастицы (позитрон e^+, антинейтрино $\tilde{\nu}_e$, антикварк $\tilde{u}$ и т.д.). Кварки u и d – легкие, и из них состоят протон (кварковый состав uud) и нейтрон (udd). Остальные кварки – более тяжелые, они входят в состав короткоживущих частиц, например K-мезонов.

Частицы с целым спином называют бозонами. К ним относится фотон, он имеет спин 1. Единичным спином обладают и глюоны – отдаленные аналоги фотона, отвечающие за взаимодействия между кварками и связывающие их в протон, нейтрон и другие составные частицы. Кроме того, есть еще три частицы с единичным спином –электрически заряженные W^+-, W^--бозоны и нейтральный Z-бозон. О них еще пойдет речь впереди. Ну а частица Хиггса должна иметь нулевой спин.

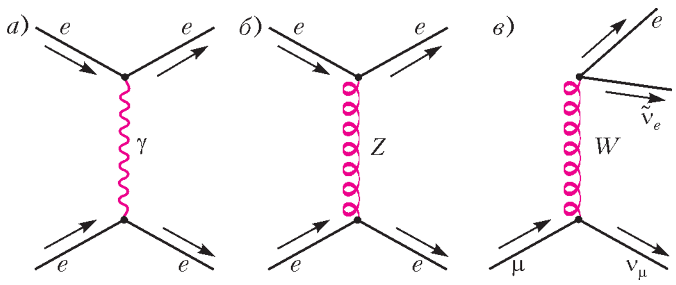
Заметим, кстати, что мы только что перечислили *все* элементарные частицы, имеющиеся в Стандартной модели.



Элементарные частицы Стандартной модели микромира

Вернемся к свойствам частиц со спином. Массивная частица со спином s (в единицах $\hbar$) имеет $(2s + 1)$ состояний с разными проекциями спина на заданную ось (спин – это вектор, так что понятие его проекции на заданную ось имеет обычный смысл). Например, спин электрона в его системе покоя может быть направлен вверх: $s_z = +1/2$ или вниз: $s_z = -1/2$. Бозон Z обладает ненулевой массой и спином $s = 1$, поэтому состояний с разными проекциями спина у него три: $s_z = +1$, 0 или -1. Совершенно иначе обстоит дело с безмассовыми частицами. Поскольку они летают со скоростью света, перейти в систему отсчета, где такая частица покоится, нельзя. Тем не менее, можно говорить о проекции спина на направление движения. Так вот, несмотря на то что спин фотона равен единице, таких проекций может быть всего две – вдоль и против направления движения. Это и есть правая и левая поляризации фотона (света). Третье состояние с нулевой проекцией спина, которое обязано было бы существовать, будь у фотона масса, *запрещено* глубокой внутренней симметрией электродинамики, той самой симметрией, что приводит к сохранению электрического заряда. Таким образом, эта внутренняя симметрия запрещает и существование массы у фотона!

Что-то не так! Ключевыми для нас являются, однако, не фотоны, а $W^\pm$- и Z-бозоны. Эти частицы, открытые в 1983 году и задолго до этого предсказанные теоретиками, обладают спином 1 и довольно большой массой: $W^\pm$-бозоны имеют массу 80 ГэВ (т.е. они примерно в 80 раз тяжелее протона), а Z-бозон имеет массу 91 ГэВ. Свойства $W^\pm$- и Z-бозонов сейчас хорошо известны, в основном благодаря экспериментам на электрон-позитронном и протон-антипротонном коллайдерах: точность измерений целого ряда величин, относящихся к $W^{\pm}$- и Z-бозонам, лучше 0,1%. Эти свойства, как и свойства других частиц, прекрасно описываются Стандартной моделью. Последнее замечание относится и к взаимодействиям $W^{\pm}$- и Z-бозонов с электроном, нейтрино, кварками и другими частицами. Эти взаимодействия, кстати, называют слабыми. Они изучены во всех деталях; один из давно известных примеров их проявления – это β-распады мюона, нейтрона и ядер.



Электромагнитное (а) и слабые (б, в) взаимодействия

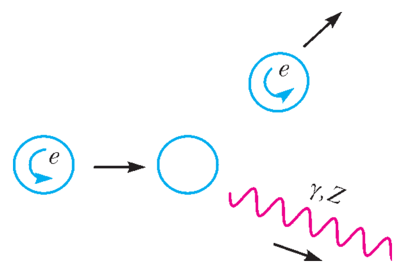
Как мы уже говорили, каждый из $W^{\pm}$- и Z-бозонов может находиться в трех спиновых состояниях, а не в двух, как фотон. Тем не менее, их взаимодействия с фермионами (нейтрино, кварками, электроном и т.д.) устроены в принципе так же, как взаимодействие фотона. Например, фотон взаимодействует с электрическим зарядом электрона и электрическим током, который создает движущийся электрон. Точно так же Z-бозон взаимодействует с некоторым зарядом электрона и током, возникающим при движении электрона, только эти заряд и ток не совпадают с электрическими. С точностью до важной особенности, о которой пойдет вскоре речь, аналогия будет полной, если помимо электрического заряда электрону приписать еще и z-заряд. Своими z-зарядами обладают и кварки, и нейтрино.

Аналогия с электродинамикой простирается еще дальше. Так же, как и теория фотона, теория $W^{\pm}$- и Z-бозонов обладает глубокой внутренней симметрией, близкой к той, что приводит к закону сохранения электрического заряда. В полной аналогии с фотоном, эта внутренняя симметрия запрещает $W^{\pm}$ и Z-бозонам иметь третью поляризацию, а стало быть и массу. Вот тут и получается нестыковка: симметрийный запрет на массу частицы со спином 1 действительно работает в случае фотона, а в случае $W^{\pm}$- и Z-бозонов этот запрет *не работает*!

Дальше – больше. Слабые взаимодействия – взаимодействия электронов, нейтрино, кварков и других частиц с $W^{\pm}$- и Z-бозонами – устроены так, как если бы эти фермионы не имели никакой массы. Дело здесь не в числе поляризаций: и у массивных, и у безмассовых фермионов поляризаций (направлений спина) может быть ровно две. А в том, как именно взаимодействуют фермионы с $W^{\pm}$- и Z-бозонами.

Чтобы пояснить суть проблемы, выключим сначала массу электрона (в теории такое позволено) и рассмотрим воображаемый мир, в котором масса электрона равна нулю. В таком мире электрон летает со скоростью света и может иметь спин, направленный вдоль направления движения или против него. Так же, как и для фотона, в первом случае имеет смысл говорить об электроне с правой поляризацией или, короче, о правом электроне, во втором – о левом электроне.

Поскольку мы хорошо знаем, как устроены электромагнитные и слабые взаимодействия (только в них электрон и участвует), мы вполне способны описать свойства электрона в нашем воображаемом мире. А они таковы. Во-первых, в этом мире правый и левый электроны – две совершенно разные частицы: правый электрон никогда не превращается в левый, и наоборот. Действительно, превращение правого электрона в левый на лету запрещено законом сохранения углового момента (в данном случае спина), а взаимодействия электрона с фотоном и Z-бозоном не меняют его поляризацию. Во-вторых, взаимодействие электрона с W-бозоном испытывает только левый электрон, а правый в нем вообще не участвует. Третьей важной особенностью, о которой мы обмолвились выше, является в этой картине то, что z-заряды левого и правого электронов различны – левый электрон взаимодействует с Z-бозоном сильнее, чем правый. Аналогичные свойства имеются и у мюона, и у тау-лептона, и у кварков.



Неизменность проекции спина электрона при испускании фотона или Z-бозона

Подчеркнем, что в воображаемом мире с безмассовыми фермионами нет никаких проблем с тем, что левые и правые электроны взаимодействуют с W- и Z-бозонами по-разному, в частности что «левый» и «правый» z-заряды различны. В этом мире левые и правые электроны – это разные частицы, и дело с концом. Нас же не удивляет, что разные частицы, например электрон и нейтрино, имеют разные электрические заряды (в данном случае −1 и 0).

Попробуем теперь включить массу электрона – и немедленно придем к противоречию. Быстро движущийся электрон, скорость которого близка к скорости света, а спин направлен против направления движения, выглядит почти так же, как левый электрон из нашего воображаемого мира. И взаимодействовать он должен почти так же.[3] Если это взаимодействие связано с z-зарядом, то этот быстрый электрон должен иметь «левое» значение z-заряда – такое же, как z-заряд левого электрона в нашем воображаемом мире. Однако скорость массивного электрона все-таки меньше скорости света, и всегда можно перейти в систему отсчета,

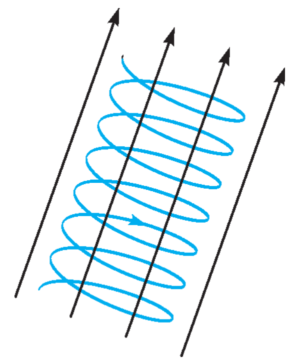
[3] В реальном мире для ограниченного (но только ограниченного!) круга процессов так оно и оказывается. Например, взаимодействие быстрого массивного электрона, спин которого направлен против направления движения, с *покоящейся или медленно движущейся* мишенью (скажем, атомным ядром) практически не отличается от взаимодействия левого безмассового электрона.

движущуюся еще быстрее. В новой системе направление движения электрона изменится на противоположное, а направление спина останется прежним. Проекция спина на направление движения будет теперь положительной, и такой электрон будет выглядеть как правый, а не как левый.[4] Соответственно, и z-заряд его должен быть таким же, как у правого электрона из нашего воображаемого мира. Такого не может быть: значение заряда не должно зависеть от системы отсчета. Противоречие налицо. Подчеркнем, что мы пришли к нему, предполагая, что z-заряд сохраняется; если заряд не сохраняется, то о его значении для данной частицы и говорить не приходится.

Это противоречие показывает, что симметрии Стандартной модели (для определенности будем говорить о ней, хотя все сказанное относится к любому другому варианту теории) должны были бы запрещать существование масс не только у $W^{\pm}$- и Z-бозонов, но и у фермионов. При чем тут симметрии? При том, что они должны были бы приводить к сохранению z-заряда. Измерив z-заряд электрона, мы смогли бы однозначно сказать, левый этот электрон или правый. А это возможно только тогда, когда масса электрона равна нулю.

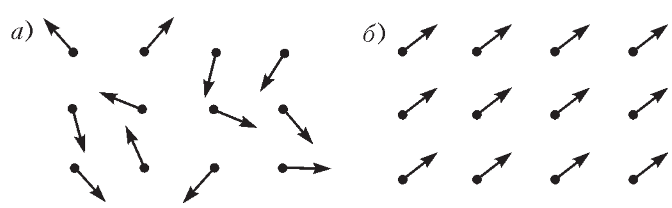
Таким образом, в мире, где все симметрии Стандартной модели реализовывались бы так же, как в электродинамике, все элементарные частицы должны были бы иметь нулевые массы. В реальном мире эти массы есть, значит, с симметриями Стандартной модели что-то должно происходить.

Нарушение симметрии. Говоря о связи симметрии с законами сохранения и запретами, мы упустили из виду одно обстоятельство. Оно заключается в том, что законы сохранения и симметрийные запреты выполняются только тогда, когда симметрия присутствует явно. Однако симметрии могут быть и нарушенными. Например, в однородном образце железа при комнатной температуре всегда имеется магнитное поле, направленное в какую-то сторону; образец представляет собой магнит. Если бы существовали микроскопические существа, живущие внутри этого магнита, то они бы обнаружили, что не все направления пространства вокруг них равноправны: на электрон, летящий поперек магнитного поля, действует сила со стороны магнитного поля – сила Лоренца, а на электрон, летящий вдоль поля, сила не действует. Соответственно, движение электрона вдоль магнитного поля происходит по прямой, поперек поля – по окружности, а в общем случае – по спирали. Стало быть, магнитное поле внутри образца нарушает симметрию относительно вращений в пространстве. В связи с этим внутри магнита не выполняется и закон сохранения углового момента: при движении электрона по спирали проекция углового момента на ось, перпендикулярную магнитному полю, меняется со временем.



Движение электрона по спирали в магнитном поле

Здесь мы имеем дело со *спонтанным* нарушением симметрии. В отсутствие внешних воздействий (например, магнитного поля Земли) в разных образцах железа магнитное поле может быть направлено в разные стороны, и ни одно из этих направлений не будет предпочтительнее другого. Исходная симметрия относительно вращений по-прежнему имеется, и проявляется она в том, что магнитное поле в образце может быть направлено куда угодно. Но раз уж магнитное поле возникло, появилось и выделенное направление, и симметрия внутри магнита оказалась нарушенной. На более формальном уровне: *уравнения*, управляющие взаимодействием атомов железа между собой и с магнитным полем, *симметричны* относительно вращений в пространстве, но *состояние* системы этих атомов – образца железа – *несимметрично*. В этом и состоит явление спонтанного нарушения симметрии. Отметим, что мы здесь говорим о наиболее выгодном состоянии, имеющем наименьшую энергию; такое состояние называют основным. Именно в нем окажется в конце концов образец железа, даже если изначально он был ненамагниченным.



Спонтанное нарушение симметрии в образце железа в присутствии магнитного поля

Итак, спонтанное нарушение некоторой симметрии имеет место тогда, когда уравнения теории симметричны, а основное состояние – нет. Слово «спонтанное» употребляют в этом случае в связи с тем, что система сама, без нашего участия, выбирает несимметричное состояние, поскольку именно оно является энергетически наиболее выгодным. Из приведенного примера ясно, что если симметрия спонтанно нарушена, то вытекающие из нее законы сохранения и запреты не работают; в нашем примере это относится к сохранению углового момента. Подчеркнем, что полная симметрия теории может быть нарушена лишь частично: в нашем примере из полной симметрии относительно всех вращений в пространстве остается ненарушенной симметрия относительно вращений вокруг направления магнитного поля.

Микроскопические существа, живущие внутри магнита, могли бы задать себе вопрос: «В нашем мире не все направления равноправны, угловой момент не сохраняется, но является ли пространство фундамен-

[4] Противоречия с утверждением, сделанным в предыдущей сноске, здесь нет: в новой системе мишень движется быстрее электрона, и в реальном мире взаимодействие электрона с ней существенно отличается от взаимодействия с покоящейся мишенью.

тально несимметричным относительно вращений?» Изучив движение электронов и построив соответствующую теорию (в данном случае электродинамику), они бы поняли, что ответ на этот вопрос отрицателен: уравнения этой теории симметричны, но эта симметрия спонтанно нарушена за счет «разлитого» вокруг них магнитного поля. Развивая эту теорию дальше, они бы предсказали, что поле, отвечающее за спонтанное нарушение симметрии, должно иметь свои кванты. И построив внутри магнита маленький ускоритель, с радостью убедились бы, что эти кванты действительно существуют – они рождаются в столкновениях электронов!

В общих чертах ситуация в физике элементарных частиц похожа на ту, что мы только что описали. Но есть и важные отличия.

Во-первых, ни о какой среде наподобие кристаллической решетки атомов железа говорить уже не приходится. Состоянием с наинизшей энергией в природе является вакуум (по определению!). Это не означает, что в вакууме – основном состоянии природы – не может быть однородно «разлитых» полей, подобных магнитному полю в нашем примере. Наоборот, нестыковки, о которых мы говорили, свидетельствуют о том, что симметрии Стандартной модели (точнее, их часть) должны быть спонтанно нарушенными, а это предполагает, что в вакууме имеется какое-то поле, обеспечивающее это нарушение.

Во-вторых, речь идет не о пространственно-временны́х, как в нашем примере, а о внутренних симметриях. Пространственно-временны́е симметрии, наоборот, не должны нарушаться из-за присутствия поля в вакууме. Отсюда следует важный вывод о том, что, в отличие от магнитного, это поле не должно выделять никакого направления в пространстве (точнее, в пространстве-времени, поскольку мы имеем дело с релятивистской физикой). Поля с таким свойством называют *скалярными*; им соответствуют частицы со спином 0. Стало быть, поле, «разлитое» в вакууме и приводящее к нарушению симметрии, должно быть новым. Действительно, известным полям, о которых мы явно или неявно упоминали выше – электромагнитному полю, полям $W^{\pm}$- и Z-бозонов, глюонов – соответствуют частицы со спином 1, такие поля выделяют направления в пространстве-времени и называются *векторными*, а нам требуется скалярное. Поля, соответствующие фермионам (спин $1/2$), тоже не годятся.

В-третьих, новое поле должно нарушать симметрии Стандартной модели не полностью, внутренняя симметрия электродинамики должна оставаться ненарушенной.

Наконец, и это самое главное, взаимодействие нового поля, «разлитого» в вакууме, с $W^{\pm}$- и Z-бозонами, электронами и другими фермионами должно приводить к появлению масс у этих частиц.

Механизм генерации масс частиц со спином 1 – в природе это $W^{\pm}$- и Z-бозоны – за счет спонтанного нарушения симметрии был предложен в контексте физики элементарных частиц теоретиками из Брюсселя Франсуа Энглером и Робертом Браутом и чуть позже физиком из Эдинбурга Питером Хиггсом. Произошло это в 1964 году. Они опирались на представление о спонтанном нарушении симметрии (но в теориях без векторных полей, т.е. без частиц со спином 1), которое было введено в физику элементарных частиц в 1960–1961 годах в работах Й.Намбу, Й.Намбу и Дж.Йона-Лазинио, В.Г.Вакса и А.И.Ларкина, Дж.Голдстоуна. (Й.Намбу, совместно с М.Кобаяши и Т.Маскава, получил за это Нобелевскую премию в 2008 году.) В отличие от предыдущих авторов, Энглер, Браут и Хиггс рассмотрели теорию (в то время умозрительную), в которой присутствует как скалярное (спин 0), так и векторное (спин 1) поле. В этой теории имеется внутренняя симметрия, вполне аналогичная той симметрии электродинамики, которая приводит к сохранению электрического заряда и запрету массы фотона, но, в отличие от электродинамики, внутренняя симметрия спонтанно нарушена однородным скалярным полем, имеющимся в вакууме. Замечательным результатом Энглера, Браута и Хиггса стала демонстрация того факта, что это нарушение симметрии автоматически влечет за собой появление массы у частицы со спином 1 – кванта векторного поля!

Довольно прямолинейное обобщение механизма Энглера–Браута–Хиггса, связанное с включением в теорию фермионов и их взаимодействия с нарушающим симметрию скалярным полем, приводит к тому, что массы появляются и у фермионов. Все начинает становиться на свои места. Стандартная модель теперь получается в результате дальнейшего обобщения путем включения не одного, а нескольких векторных полей – фотона, $W^{\pm}$- и Z-бозонов и разных типов фермионов. Последний шаг на самом деле весьма нетривиален; за формулировку полной теории слабых и электромагнитных взаимодействий Стивен Вайнберг, Шелдон Ли Глэшоу и Абдус Салам получили в 1979 году Нобелевскую премию.

Вернемся в 1964 год. Для исследования свойств своей теории Энглер и Браут использовали довольно вычурный по сегодняшним меркам подход. Наверное поэтому они не заметили, что наряду с массивной частицей со спином 1 эта теория предсказывает существование еще одной частицы – бозона со спином 0. А вот Хиггс заметил, и сейчас эту новую бесспиновую частицу часто называют бозоном Хиггса. Как было отмечено в начале статьи, такая терминология представляется не вполне корректной: ключевое предложение использовать скалярное поле для спонтанного нарушения симметрии и генерации масс частиц со спином 1 впервые сделали все же Энглер и Браут. Не вдаваясь больше в терминологию, подчеркнем, что новый бозон с нулевым спином является квантом того самого скалярного поля, которое нарушает симметрию. И в этом его уникальность.

Здесь нужно сделать уточнение. Повторим, что если бы спонтанного нарушения симметрии не было, то $W^{\pm}$- и Z-бозоны были бы безмассовыми. Каждый из трех бозонов W^{+}, W^{-}, Z имел бы две поляризации, как фотон. Итого, считая частицы с разными поляризациями разными, мы бы имели $2\times3=6$ типов $W^{\pm}$- и Z-бозонов. В Стандартной модели $W^{\pm}$- и

Z-бозоны – массивные, каждый из них имеет три спиновых состояния, т.е. три поляризации, итого $3 \times 3 = 9$ типов частиц – квантов полей. Спрашивается, откуда взялись три «лишних» типа квантов? Дело заключается в том, что в Стандартной модели необходимо ввести не одно, а четыре скалярных поля Энглера–Браута–Хиггса. Квант одного из них – это бозон Хиггса, новая частица, открытая в ЦЕРНе. А кванты трех других полей в результате спонтанного нарушения симметрии как раз и превращаются в три «лишних» кванта, имеющихся у массивных $W^{\pm}$-, Z-бозонов. Искать их бесполезно, они уже давно найдены, коль скоро известно, что $W^{\pm}$- и Z-бозоны имеют массу: три «лишних» спиновых состояния W^{+}-, W^{-}- и Z-бозонов – это они и есть.

Эта арифметика, кстати, согласуется с тем, что все четыре поля Энглера–Браута–Хиггса – скалярные, их кванты имеют нулевой спин. Безмассовые $W^{\pm}$- и Z-бозоны имели бы проекции спина на направление движения, равные –1 и +1. Для массивных $W^{\pm}$- и Z-бозонов эти проекции принимают значения –1, 0 и +1, т.е. «лишние» кванты имеют нулевую проекцию. Три поля Энглера–Браута–Хиггса, из которых эти «лишние» кванты получаются, тоже имеют нулевую проекцию спина на направление движения просто потому, что их вектор спина равен нулю. Все сходится.

Итак, бозон Хиггса – это квант одного из четырех скалярных полей Энглера–Браута–Хиггса, существующих в Стандартной модели. Три других поедаются (научный термин!) $W^{\pm}$- и Z-бозонами, превращаясь в их третьи, недостающие спиновые состояния.

А действительно ли нужен новый бозон?

Самое удивительное в этой истории заключается в том, что сегодня мы понимаем: механизм Энглера–Браута–Хиггса – отнюдь не единственный возможный механизм нарушения симметрии в физике микромира и генерации масс элементарных частиц, а бозон Хиггса мог бы и не существовать. Этому нас учит, в частности, физика конденсированных сред (жидкостей, твердых тел). В ней имеется множество примеров спонтанного нарушения симметрии и разнообразие механизмов этого нарушения. И в большинстве случаев ничего похожего на бозон Хиггса в этих примерах нет.

Ближайшим твердотельным аналогом спонтанного нарушения симметрии Стандартной модели в вакууме является спонтанное нарушение внутренней симметрии электродинамики в толще сверхпроводника. Оно приводит к тому, что в сверхпроводнике фотон в определенном смысле обладает массой (как $W^{\pm}$- и Z-бозоны в вакууме). Проявляется это в эффекте Мейсснера – выталкивании магнитного поля из сверхпроводника. Фотон не хочет проникать внутрь сверхпроводника, где он становится массивным: ему там «тяжело», ему энергетически невыгодно там находиться (вспомните $E = mc^2$). Магнитное поле, которое можно несколько условно воспринимать как набор фотонов, обладает тем же свойством: оно в сверхпроводник не проникает. Это и есть эффект Мейсснера.

Эффективная теория сверхпроводимости, теория Гинзбурга–Ландау, чрезвычайно похожа на теорию Энглера–Браута–Хиггса (точнее наоборот: теория Гинзбурга–Ландау на 14 лет старше). В теории Гинзбурга–Ландау тоже есть скалярное поле, которое однородно «разлито» по сверхпроводнику и приводит к спонтанному нарушению симметрии. Однако теорию Гинзбурга–Ландау недаром называют эффективной: она ухватывает, образно говоря, внешнюю сторону явления, но совершенно неадекватна для понимания фундаментальных, микроскопических причин возникновения сверхпроводимости. Никакого скалярного поля в сверхпроводнике на самом деле нет, в нем есть электроны и кристаллическая решетка, а сверхпроводимость обусловлена особыми свойствами основного состояния системы электронов, возникающими благодаря взаимодействию между ними.

Не может ли подобная картина иметь место и в микромире? Не может ли быть так, что никакого фундаментального скалярного поля, «разлитого» в вакууме, нет, а спонтанное нарушение симметрии вызвано совершенно иными причинами? Если рассуждать чисто теоретически и не обращать внимания на экспериментальные факты, то ответ на этот вопрос – утвердительный. Примером может служить так называемая модель техницвета, предложенная в 1979 году уже упоминавшимся Стивеном Вайнбергом и независимо Леонардом Сасскиндом. В ней нет никаких фундаментальных скалярных полей, нет и бозона Хиггса. Вместо этого есть много новых элементарных частиц, по своим свойствам напоминающих известные кварки. Взаимодействие между этими новыми частицами и приводит к спонтанному нарушению симметрии и к генерации масс $W^{\pm}$- и Z-бозонов. С массами известных фермионов, например электрона, дело обстоит хуже, но и эту проблему можно решить за счет усложнения теории.

Внимательный читатель может задать вопрос: «А как же с аргументами, говорящими, что нарушать симметрию должно именно скалярное поле?» Лазейка здесь в том, что это скалярное поле может быть *составным* – в том смысле, что соответствующие ему частицы-кванты не элементарны, но состоят из других, элементарных частиц.

Давайте вспомним в этой связи квантово-механическое соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$, где Δx и Δp – неопределенности координаты и импульса соответственно. Одно из его проявлений состоит в том, что структура составных объектов с характерным внутренним размером Δx проявляется лишь в процессах, где участвуют частицы с достаточно высокими импульсами $p \geq \hbar/\Delta x$, а значит, с высокими энергиями. Здесь уместно напомнить о Резерфорде, который бомбардировал атомы электронами высоких по тем временам энергий и таким образом выяснил, что атомы состоят из ядер и электронов. Разглядывая атомы в микроскоп даже с самой совершенной оптикой (т.е. используя свет – фотоны низких энергий), обнаружить, что атомы – составные, а не элементарные, точечные частицы, невозможно: не хватает разрешения.

Таким образом, при низких энергиях составная частица выглядит как элементарная. Для эффективного описания таких частиц при низких энергиях вполне можно считать, что они являются квантами некоторого поля. Если спин составной частицы равен нулю, то это поле будет скалярным.

Подобная ситуация реализуется, например, в физике π-мезонов – частиц со спином 0. До середины 60-х годов прошлого века не было известно, что π-мезоны состоят из кварков и антикварков. Тогда π-мезоны описывались элементарными скалярными полями. Теперь мы знаем, что π-мезоны – составные частицы, но «старая» полевая теория π-мезонов остается в силе постольку, поскольку рассматриваются процессы при низких энергиях. Лишь при энергиях порядка 1 ГэВ и выше начинает проявляться кварковая структура π-мезонов, и эта теория перестает работать. Энергетический масштаб 1 ГэВ здесь появился не случайно: это масштаб сильных взаимодействий, связывающих кварки в π-мезоны, протон, нейтрон и т.д., это масштаб масс сильновзаимодействующих частиц, например протона. Отметим, что сами π-мезоны стоят особняком – по причине, о которой мы не будем здесь говорить, они имеют гораздо меньшие массы: $m_{\pi^\pm} = 140$ МэВ, $m_{\pi^0} = 135$ МэВ.

Итак, скалярные поля, ответственные за спонтанное нарушение симметрии, могут в принципе быть составными. Именно такая ситуация предполагается в модели техницвета. При этом три бесспиновых кванта, которые поедаются $W^\pm$- и Z-бозонами и становятся их недостающими спиновыми состояниями, имеют близкую аналогию с π^+-, π^-- и π^0-мезонами. Только теперь соответствующий энергетический масштаб – не 1 ГэВ, а несколько ТэВ. В такой картине ожидается существование множества новых составных частиц – аналогов протона, нейтрона и т.д. – с массами в области нескольких ТэВ. Сравнительно легкий бозон Хиггса в ней, наоборот, отсутствует. Еще одна особенность модели в том, что $W^\pm$- и Z-бозоны являются в ней отчасти составными частицами, поскольку, как мы сказали, некоторые их компоненты аналогичны π-мезонам. Это должно было бы проявляться во взаимодействиях $W^\pm$- и Z-бозонов.

Именно последнее обстоятельство привело к тому, что модель техницвета (по крайней мере в ее изначальной формулировке) была отвергнута задолго до недавнего экспериментального обнаружения нового бозона: точные измерения свойств $W^\pm$- и Z-бозонов не согласуются с предсказаниями модели. Открытие же нового бозона окончательно поставило крест на модели техницвета. Красивая теория была разгромлена упрямыми экспериментальными фактами! Тем не менее, мне, как и ряду других теоретиков, идея о составных скалярных полях представляется более привлекательной по сравнению с теорией Энглера–Браута–Хиггса, использующей элементарные скалярные поля. Конечно, после открытия в ЦЕРНе нового бозона идея о составленности оказалась в более трудном положении, чем раньше: если эта частица составная, она должна достаточно успешно мимикрировать под элементарный бозон Хиггса. И все же подождем, что скажут по этому поводу эксперименты на Большом адронном коллайдере, в первую очередь – более точные измерения свойств нового бозона.

Открытие сделано. Что дальше?

Вернемся, в качестве рабочей гипотезы, к минимальной версии теории – к Стандартной модели с одним элементарным бозоном Хиггса. Поскольку в этой теории именно поле (точнее, поля) Энглера–Браута–Хиггса дает массы всем элементарным частицам, взаимодействие каждой из этих частиц с бозоном Хиггса жестко фиксировано. Чем больше масса частицы, тем сильнее взаимодействие; чем сильнее взаимодействие, тем более вероятен распад бозона Хиггса на пару частиц данного сорта. Распады бозона Хиггса на пары реальных частиц $t\tilde{t}$, ZZ и W^+W^- запрещены законом сохранения энергии, который требует, чтобы сумма масс продуктов распада была меньше массы распадающейся частицы (опять вспоминаем $E = mc^2$), а у нас, напомним, $m_H \approx 125$ ГэВ, $m_t = 173$ ГэВ, $m_Z = 91$ ГэВ и $m_W = 80$ ГэВ. Следующим по массе стоит b-кварк с массой $m_b = 4$ ГэВ, и именно поэтому, как мы говорили, бозон Хиггса охотнее всего распадается на пару $b\tilde{b}$. Интересен и распад бозона Хиггса на пару довольно тяжелых τ-лептонов: $H \to \tau^+\tau^-$ ($m_\tau = 1{,}8$ ГэВ); он должен происходить с вероятностью 6% (это означает, что так распадаются 6 бозонов Хиггса из 100). Распад $H \to \mu^+\mu^-$ ($m_\mu = 106$ МэВ) должен происходить с еще меньшей, но все еще неисчезающей вероятностью 0,02%. Помимо обсуждавшихся выше распадов $H \to \gamma\gamma$, $H \to 4l$ и $H \to 2l2\nu$, отметим еще распад $H \to Z\gamma$, вероятность которого должна составлять 0,15%. Все эти вероятности можно будет измерить на Большом адронном коллайдере, и любое отклонение от этих предсказаний будет означать, что наша рабочая гипотеза – Стандартная модель – неверна. И наоборот, согласие с предсказаниями Стандартной модели будет все больше и больше убеждать нас в ее справедливости.

То же можно сказать и о рождении бозона Хиггса в столкновениях протонов на Большом адронном коллайдере. Бозон Хиггса может рождаться в одиночку, или вместе с парой легких кварков высоких энергий, или вместе с одним W- или Z-бозоном, наконец, вместе с парой $t\tilde{t}$. Частицы, рождающиеся вместе с бозоном Хиггса, можно детектировать и отождествлять, поэтому разные механизмы рождения можно изучать на Большом адронном коллайдере по отдельности. Тем самым можно извлекать информацию о взаимодействии бозона Хиггса с $W^\pm$-, Z-бозонами и t-кварком.

Наконец, важным свойством бозона Хиггса является его взаимодействие с самим собой. Оно должно проявляться в процессе $H^* \to HH$, где H^* – виртуальная частица. В Стандартной модели свойства этого взаимодействия тоже однозначно предсказываются. Впрочем, его изучение – дело отдаленного будущего.

Итак, на Большом адронном коллайдере имеется обширная программа исследования взаимодействий нового бозона. В результате ее выполнения станет более или менее ясно, описывается ли природа Стандартной моделью или мы имеем дело с какой-то другой, более сложной (а может быть, и более простой) теорией. Дальнейшее продвижение связано с существенным повышением точности измерений; оно потребует строительства нового e^+e^--коллайдера с рекордной для этого типа машин энергией. Очень может быть, что на этом пути нас поджидает масса сюрпризов.

Вместо заключения: в поисках «новой физики»

С «технической» точки зрения, Стандартая модель внутренне непротиворечива. Это означает, что в ее рамках можно – хотя бы в принципе, а как правило и на практике – вычислить любую физическую величину (разумеется, относящуюся к тем явлениям, которые призвана описывать Стандартная модель) и результат не будет содержать неопределенностей. Тем не менее, многие, хотя и не все, теоретики считают положение дел в Стандартной модели не вполне удовлетворительным, мягко говоря. И связано это в первую очередь с ее энергетическим масштабом.

Как ясно из предыдущего, энергетический масштаб Стандартной модели имеет порядок $M_{\text{с.м.}} = 100$ ГэВ (мы здесь не говорим о сильных взаимодействиях с масштабом 1 ГэВ, с этим масштабом все проще). Это масштаб масс $W^{\pm}$- и Z-бозонов и бозона Хиггса. Много это или мало? С экспериментальной точки зрения – немало, а вот с теоретической...

В физике имеется еще один масштаб энергий. Он связан с гравитацией и равен планковской массе $M_P = 10^{19}$ ГэВ. При низких энергиях гравитационные взаимодействия между частицами пренебрежимо слабы, но они усиливаются с ростом энергии, и при энергиях порядка M_P гравитация становится сильной. Область энергий выше M_P – это область квантовой гравитации, что бы она из себя не представляла. Для нас важно, что гравитация – самое, пожалуй, фундаментальное взаимодействие, и гравитационный масштаб M_P – самый фундаментальный масштаб энергий. Почему же тогда масштаб Стандартной модели так далек от гравитационного масштаба?

У обозначенной проблемы есть еще один, более тонкий аспект. Он связан со свойствами физического вакуума. В квантовой теории вакуум – основное состояние природы – устроен совсем нетривиально. В нем все время рождаются и уничтожаются виртуальные частицы, иными словами, образуются и исчезают флуктуации полей. Непосредственно наблюдать эти процессы мы не можем, но они оказывают влияние на наблюдаемые свойства элементарных частиц, атомов и т.д. Например, взаимодействие электрона в атоме с виртуальными электронами и фотонами приводит к наблюдаемому в атомных спектрах явлению – лэмбовскому сдвигу. Другой пример – поправка к магнитному моменту электрона или мюона (аномальный магнитный момент) тоже обусловлена взаимодействием с виртуальными частицами. Эти и подобные эффекты вычислены и измерены (в указанных случаях с фантастической точностью!), так что мы можем быть уверены, что имеем правильную картину физического вакуума.

В этой картине *все* параметры, изначально закладываемые в теорию, получают поправки, связанные с взаимодействием с виртуальными частицами. Их называют радиационными поправками. В квантовой электродинамике эти поправки малы, а вот в теории Энглера–Браута–Хиггса они огромны. Такова особенность элементарных скалярных полей; у других полей этого свойства нет. Главный эффект здесь состоит в том, что радиационные поправки стремятся «подтянуть» энергетический масштаб Стандартной модели к гравитационному масштабу. Если оставаться в рамках Стандартной модели, то единственный выход – подобрать изначальные параметры теории так, чтобы вместе с радиационными поправками они приводили к правильному значению $M_{\text{с.м.}}$. При этом выясняется, что точность подгонки должна составлять величину, близкую к отношению $M^2_{\text{с.м.}}/M^2_P = 10^{-34}$! В этом и состоит второй аспект проблемы энергетического масштаба Стандартной модели: представляется неправдоподобным, что такая подгонка имеет место в природе.

Многие (хотя, повторим, не все) теоретики считают, что эта проблема однозначно свидетельствует о необходимости выхода за рамки Стандартной модели. Действительно, если Стандартная модель перестает работать или существенно расширяется на энергетическом масштабе новой физики $M_{\text{н.ф.}}$, то аргумент о радиационных поправках модифицируется. Требуемая точность подгонки параметров в этом случае составляет, грубо говоря, $M^2_{\text{с.м.}}/M^2_{\text{н.ф.}}$, а на самом деле на пару порядков слабее. Если считать, что тонкой подстройки параметров в природе нет, то отсюда следует, что масштаб «новой физики» должен лежать в области 1–2 ТэВ, т.е. как раз в области, доступной для исследования на Большом адронном коллайдере!

Какой могла бы быть «новая физика»? Единства у теоретиков по этому поводу нет. Один вариант – составная природа скалярных полей, обеспечивающих спонтанное нарушение симметрии. О нем мы уже говорили. Другая, тоже популярная (пока?) возможность – суперсимметрия. На ней мы останавливаться не будем; скажем только, что суперсимметрия предсказывает целый зоопарк новых частиц с массами в области сотен ГэВ – нескольких ТэВ. Обсуждаются и весьма экзотические варианты вроде дополнительных измерений пространства.

Несмотря на все усилия, до сих пор никаких экспериментальных указаний на «новую физику» получено не было. Это, вообще-то, уже начинает внушать тревогу: а правильно ли мы все понимаем? Вполне возможно, впрочем, что мы еще не добрались до «новой физики» по энергии и по количеству набранных данных и что именно с ней будут связаны новые, революционные открытия. Основные надежды здесь возлагаются опять-таки на Большой адронный коллайдер, который через полтора года начнет работать на полную энергию 13–14 ТэВ и быстро набирать данные. Так что следите за новостями!

О коровах, линейной алгебре и многомерных пространствах

С.ДОРИЧЕНКО

Завязка

Будучи студентом первого курса мехмата МГУ я услышал от однокурсников интересную задачу. Вот ее условие.

В стаде 101 корова. Если увести любую одну корову, то оставшихся можно разделить на две части по 50 коров в каждой так, что суммарный вес коров первой части будет равен суммарному весу коров другой части. Докажите, что все коровы весят одинаково.

Задача мне очень понравилась, и я довольно быстро придумал рассуждение, которое, как мне показалось, решало эту задачу. Вот это рассуждение.

Во-первых, все веса коров можно поделить на любое (ненулевое) число – задача для нового стада будет эквивалентна исходной.

Во-вторых, можно от веса каждой коровы отнять одно и то же число – для нового стада будут выполнены условия исходной задачи. Ведь если раньше мы могли разделить любые сто коров на две части по 50 коров в каждой с одинаковым суммарным весом, то и теперь годятся эти же части: из суммарного веса каждой части вычтется одно и то же, а именно $50a$, где a – то самое число, на которое мы уменьшили вес каждой коровы. Так что решить задачу для нового стада – все равно, что решить для старого.

Поэтому можно считать, что у нас есть корова с нулевым весом (уменьшим все веса на вес самой легкой коровы). Тогда суммарный вес оставшихся 100 коров, очевидно, четен – ведь их можно разделить на две части с равным весом.

Будем теперь делить веса всех коров на 2 – до тех пор, пока все они остаются целыми. Ясно, что каждый раз будут получаться коровы, удовлетворяющие условию задачи, причем суммарный их вес будет оставаться четным (поскольку есть «нулевая» корова).

Мы не сможем делить на 2 до бесконечности – кроме случая, когда все веса нули. А в этом случае задача решена – коровы весят одинаково. Если же есть хоть

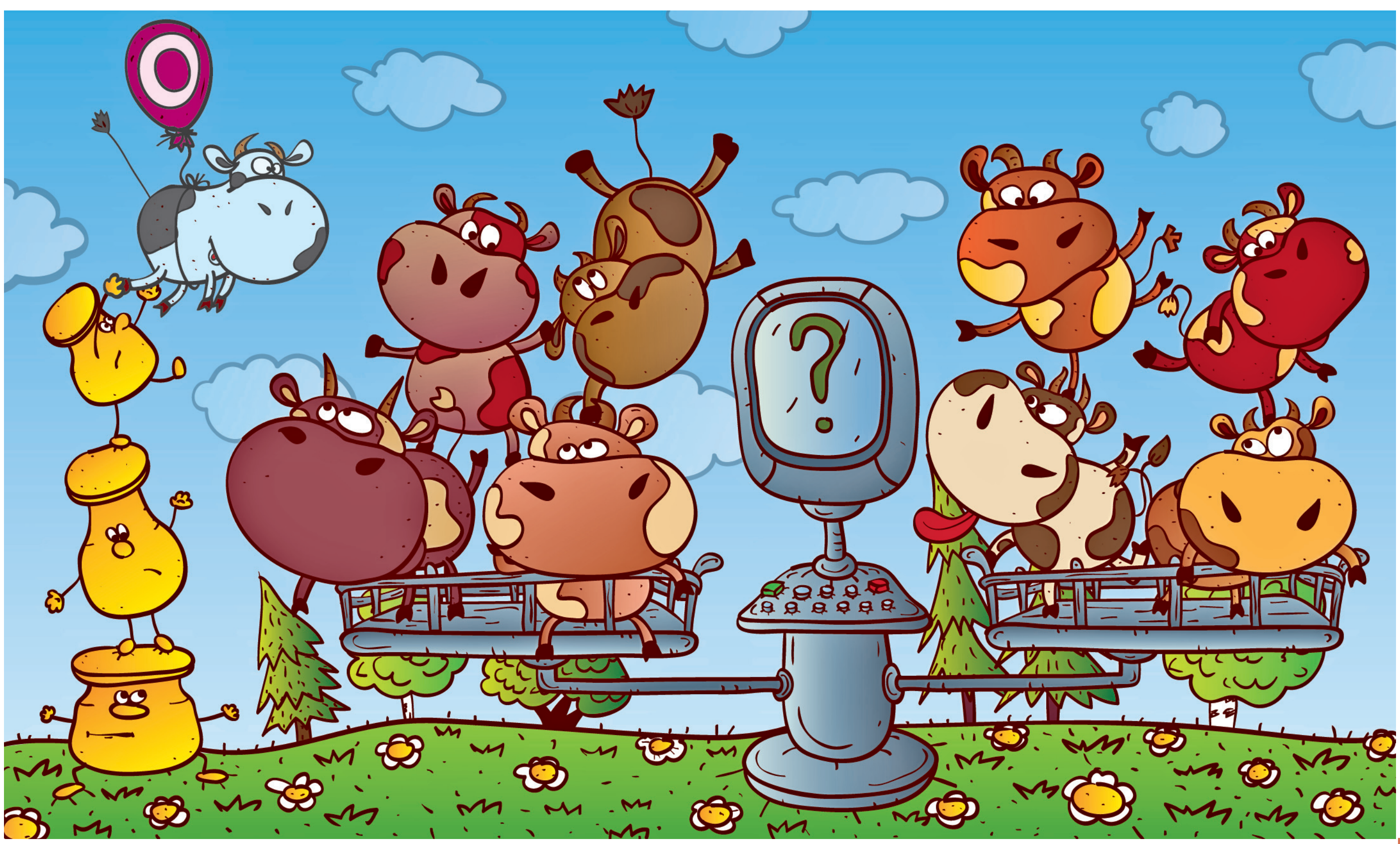


Иллюстрация Л.Широниной

один ненулевой вес, то в какой-то момент появится нечетный вес. Уведем из стада корову с этим весом – тогда вес оставшихся будет четен. Значит, общий вес всех коров нечетен – противоречие!

Вопрос. Верное ли это решение?

Когда я радостно рассказал решение однокурсникам, они огорчили меня – оказывается, я не вполне понял условие и решил задачу лишь в частном случае. В моем решении молчаливо предполагалось, что веса коров – целые числа. И для таких весов оно верное. Но в исходной задаче веса могли быть произвольными действительными числами.

Первые обобщения

Как же быть? Конечно, легко решить задачу для любых рациональных весов – просто домножить на их общий знаменатель и свести к целым весам. А если среди весов есть иррациональные?

Сходу непонятно было, что делать с общим случаем, как перейти от рациональных чисел к любым. И все-таки мне очень повезло, что я сначала ошибся. Ведь разобранный случай – это уже существенная часть решения, можно сказать – полдела. Теперь надо было пробовать двигаться дальше.

Например, если бы все веса имели вид $r\sqrt{2}$, где r – рациональное, мы бы тоже справились мгновенно (сократив на $\sqrt{2}$).

Попробуем немного расширить множество возможных весов. Допустим, что вес любой коровы – число вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b. Вес i-й по счету коровы запишем как $a_i+b_i\sqrt{2}$. Условие задачи состоит в том, что выполнены некоторые равенства: скажем, уводя 101-ю корову, мы можем как-то разбить остальных на части по 50 коров с одинаковым суммарным весом. Можно считать, что это равенство выглядит так:

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(a_{50}+b_{50}\sqrt{2}\right)=$$
$$=\left(a_{51}+b_{51}\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(a_{100}+b_{100}\sqrt{2}\right).$$

Перепишем его в другом виде, перенеся все числа с множителем $\sqrt{2}$ вправо, а без него влево, и сгруппировав:

$$\left(a_1+\ldots+a_{50}\right)-\left(a_{51}+\ldots+a_{100}\right)=$$
$$=\left(\left(b_{51}+\ldots+b_{100}\right)-\left(b_1+\ldots+b_{50}\right)\right)\sqrt{2}.$$

Заметьте: слева стоит заведомо рациональное число. А справа – либо ноль, либо иррациональное число. Последнее невозможно, и, значит, слева и справа стоят нули, т.е. выполнены равенства

$$a_1+\ldots+a_{50}=a_{51}+\ldots+a_{100},$$
$$b_1+\ldots+b_{50}=b_{51}+\ldots+b_{100}.$$

Смотрите, как здорово получается: равенство из условия задачи выполняется отдельно для «рациональных частей» весов наших коров и отдельно – для «иррациональных». Тем самым, можно считать, что у нас есть как бы два новых стада: в одном коровы имеют веса $a_1,\ldots,a_{101}$, а в другом – $b_1,\ldots,b_{101}$. Причем условие задачи выполнено для каждого нового стада в отдельности. Но ведь в новых стадах веса коров рациональны. А задачу для рациональных весов мы уже решили, и, значит, в каждом новом стаде веса коров одинаковы: $a_1=\ldots=a_{101}$ и $b_1=\ldots=b_{101}$. Но тогда и веса коров в исходном стаде равны друг другу.

Итак, мы решили задачу в случае, когда веса имеют вид $a+b\sqrt{2}$.

Что же дальше? Можно, например, попробовать решить задачу для случая, когда веса коров имеют вид $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$. Вдруг там тоже окажется, что равенства выполняются «покомпонентно»: отдельно – для частей без иррациональных множителей, отдельно – для частей с множителем $\sqrt{2}$ и отдельно – для частей с множителем $\sqrt{3}$?

Упражнение. Решите задачу в этом случае.

Но до полного случая произвольных действительных чисел все равно будет еще очень далеко.

Решающее соображение

Давайте вернемся немного назад и проанализируем наше решение для весов вида $a+b\sqrt{2}$. Ясно, что вместо $\sqrt{2}$ мы могли бы взять вообще любое иррациональное число γ. Фактически главное свойство, которым мы воспользовались, было таким:

если число $a+b\gamma$, где a и b рациональны, равно нулю, то $a=b=0$.

Если мы будем брать числа вида $a+b\gamma+c\delta$, то подойдут уже не любые два иррациональных числа γ и δ. Но если вдруг будет выполнено свойство, что $a+b\gamma+c\delta=0$ только в случае $a=b=c=0$, мы снова решим задачу нашим методом.

Тут самое время отвлечься немного на терминологию. Запись вида $r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+\ldots+r_n\alpha_n$ с рациональными $r_1,\ldots,r_n$ называется *линейной комбинацией чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ с рациональными коэффициентами.*

Например, запись $a+b\sqrt{2}$, где a, b рациональны, будет линейной комбинацией чисел 1 и $\sqrt{2}$ с рациональными коэффициентами a и b. Кстати, множество всех рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$. Теперь можно сформулировать ключевое определение.

Числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ называются *линейно независимыми над $\mathbb{Q}$*, если их линейная комбинация с рациональными коэффициентами равняется нулю только в одном случае – когда все эти коэффициенты нулевые. (Слова «над $\mathbb{Q}$» означают, что речь идет именно о комбинациях с рациональными коэффициентами.)

Наши предыдущие рассуждения фактически доказывают такую теорему:

Пусть числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, и пусть вес каждой коровы является линейной комбинацией этих чисел с рациональными коэффициентами. Тогда все равенства, диктуемые условием задачи для весов коров, будут выполняться отдельно для коэффициентов при α_1 у этих весов, отдельно – для коэффициентов при α_2 и так далее.

Тем самым, все коэффициенты при α_1 у весов коров будут одинаковы, при α_2 – тоже, и так далее. А значит, будут равны сами веса коров.

Чтобы решить общую задачу, осталось найти такие линейно независимые над $\mathbb{Q}$ числа, что вес каждой коровы через них выражается как линейная комбинация с рациональными коэффициентами.

Последний рывок

На первый взгляд, совершенно не ясно, как такие числа искать. Но почему бы не рассмотреть сами веса коров? Конечно! Возьмем вес a_1 первой коровы. Если все остальные веса через него выражаются (домножением на рациональные числа), то задача решена. Если нет – возьмем тот вес, который не выражается, пусть это будет a_2. Заметьте, что числа a_1 и a_2 автоматически получились линейно независимы! Если остальные веса выражаются через них нужным образом – снова задача решена. Если нет – опять найдем вес, который не выражается через предыдущие, скажем a_3. Опять получим линейно независимые числа. (В самом деле, пусть $r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 = 0$, где r_1, r_2, r_3 рациональны. Если $r_3 \neq 0$, то $a_3 = -\frac{r_1}{r_3}a_1 - \frac{r_2}{r_3}a_2$, т.е. a_3 выражается через a_1 и a_2, что противоречит выбору a_3. Если же $r_3 = 0$, то a_1 и a_2 линейно зависимы – снова противоречие.)

Будем продолжать эту процедуру. Ясно, что на каком-то шаге мы впервые получим набор весов, через которые выражаются остальные (это произойдет уж точно не позже сотого шага). И эти веса будут линейно независимыми. А это значит, что наша задача полностью решена!

Задача. *Пусть p_1, $p_2, \ldots, p_n$ – различные простые числа. Докажите, что числа 1, $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, …, $\sqrt{p_n}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Указание. Как иногда бывает, легче решить более общую задачу: докажите, что если к выбранному набору 1, $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, …, $\sqrt{p_n}$ добавить еще квадратные корни из всевозможных произведений по два, три, …, n различных чисел из p_1, p_2, …, p_n, то полученные числа будут линейно независимы над $\mathbb{Q}$. (Таким образом, для $n = 3$, например, линейно независимыми будут числа 1, $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$, $\sqrt{p_1p_2}$, $\sqrt{p_1p_3}$, $\sqrt{p_2p_3}$, $\sqrt{p_1p_2p_3}$.) Но и такая задача очень непроста. Решение можно прочитать в статье Л. Камнева «Иррациональность суммы радикалов» в «Кванте» №2 за 1972 год.

Другой подход

Задача о коровах мне настолько понравилась, что я рассказывал ее всем своим знакомым, интересующимся математикой. И однажды Александр Ефимов, тогда еще одиннадцатиклассник, а теперь уже известный математик, в ответ рассказал мне свое решение этой задачи. Он тоже вывел общий случай задачи о коровах из случая, когда их веса рациональны, но совершенно другим способом. Оказывается, все решает одна замечательная теорема, к формулировке которой мы и переходим.

Пусть даны произвольные действительные числа c_1, c_2, …, c_n. Всегда ли можно домножить их на одно и то же натуральное число так, чтобы получились «почти целые» числа? Более точно – чтобы каждое полученное число отличалось от ближайшего к нему целого не больше чем на $\frac{1}{1000}$, например? Оказывается, да, причем можно добиться, чтобы получились «почти целые» числа с любой наперед заданной точностью. Сформулируем теорему более четко:

Теорема. *Пусть даны произвольные действительные числа c_1, c_2, …, c_n. Тогда, какое бы положительное число ε мы ни взяли, найдется такое натуральное число M, что каждое из чисел c_1M, …, c_nM будет отличаться от ближайшего к нему целого числа не больше чем на ε.*

Прежде чем разобраться с этой теоремой, давайте поймем: а при чем же тут задача о коровах? Как вывести ее из теоремы?

А вот как. Пусть $a_1, \ldots, a_{101}$ – веса наших коров. Домножим их на такое натуральное M, чтобы каждый новый вес a_iM отличался от некого целого числа c_i не больше чем на $\frac{1}{100}$. Другими словами, чтобы для каждого номера i от 1 до 101 выполнялось равенство $a_iM = c_i + \varepsilon_i$, где $c_1, \ldots, c_{101}$ – некоторые целые числа, а каждая из «добавок» $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{101}$ по модулю меньше $\frac{1}{100}$.

Давайте рассмотрим новое стадо, в котором веса коров равны $c_1, c_2, \ldots, c_{101}$ соответственно. Для старого стада выполнялось, например, такое условие: если увести 101-ю корову, оставшихся удастся разбить на части по 50 коров с одинаковым суммарным весом. Можно считать, что это условие записывается так:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{50} = a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100}.$$

Домножим это равенство на M. Так как каждое из чисел a_iM равно $c_i + \varepsilon_i$, полученное равенство переписывается в виде

$$(c_1 + \varepsilon_1) + \ldots + (c_{50} + \varepsilon_{50}) = (c_{51} + \varepsilon_{51}) + \ldots + (c_{100} + \varepsilon_{100}).$$

Соберем отдельно целые числа и отдельно – «добавки»:

$$\underbrace{(c_1 + \ldots + c_{50})}_{\text{целое число}} - \underbrace{(c_{51} + \ldots + c_{100})}_{\text{целое число}} = \underbrace{(\varepsilon_{51} + \ldots + \varepsilon_{100})}_{\text{модуль меньше 1/2}} - \underbrace{(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{50})}_{\text{модуль меньше 1/2}}.$$

В левой части последнего равенства стоит разность двух целых чисел, т.е. целое число. А в правой части стоит разность двух чисел, меньших по модулю чем $\frac{1}{2}$ (ведь оба они складываются из 50 «добавок», и каждая «добавка» по модулю меньше $\frac{1}{100}$). Но разность двух чисел, по модулю меньших $\frac{1}{2}$, может быть целым числом только если эта разность нулевая. Значит, выполнено равенство

$$\left(c_1 + \ldots + c_{50}\right) - \left(c_{51} + \ldots + c_{100}\right) = 0,$$

т.е. веса новых коров удовлетворяют такому же соотношению, что и веса старых:

$$c_1 + \ldots + c_{50} = c_{51} + \ldots + c_{100}.$$

Такое же рассуждение можно повторить для остальных равенств, выполняющихся для старого стада. Мы получаем, что для нового стада также выполнено условие задачи. А поскольку в новом стаде веса всех коров целые, то все новые коровы весят одинаково: $c_1 = c_2 = \ldots = c_{101} = c$.

Таким образом, каждое из чисел a_iM равно $c + \varepsilon_i$, откуда любые два числа a_iM и a_jM отличаются друг от друга меньше чем на $\frac{2}{100}$. Тогда a_i и a_j тем более отличаются друг от друга меньше чем на $\frac{2}{100}$.

Но ведь можно было домножить старые веса $a_1,\ldots$ $\ldots, a_{101}$ на такое натуральное число, чтобы получившиеся числа были целыми с точностью $\frac{1}{1000}$, или с точностью $\frac{1}{10000}$, и так далее. Тогда аналогичными рассуждениями мы получили бы, что любые два веса a_i и a_j отличаются друг от друга меньше чем на $\frac{2}{1000}$, а также меньше чем на $\frac{2}{10000}$, и так далее. Таким образом, они отличаются друг от друга меньше чем на любое положительное число – а это значит, что они вовсе не отличаются: $a_i = a_j$. Следовательно, старые веса коров все одинаковы – и снова задача решена!

Осталось доказать теорему.

Теорема для одного числа

Теорема выглядит даже более неприступной, чем задача про коров, поэтому разберемся сначала с простыми ее случаями. Например, пусть имеется всего одно число a и задано $\varepsilon > 0$. Почему можно выбрать такое натуральное M, что aM будет отличаться от ближайшего к нему целого числа не больше чем на ε?

Так как нас интересует расстояние до ближайшего целого, то a можно сразу заменить на его дробную часть, т.е. считать, что a меньше 1. Рассмотрим числа a, $2a$, $3a$, … Они поначалу располагаются на отрезке $[0;1]$. Мы как бы выходим из левого конца этого отрезка и идем по направлению к правому концу шагами длины a. Точки отрезка $[0;1]$, в которые мы при этом попадаем, будем отмечать красным цветом (рис.1). На каком-то шаге мы попадем в 1 или перескочим через 1 – тогда, прежде чем красить, сдвинемся на 1 влево и покрасим точку, в которую попадем после сдвига – она снова будет на отрезке $[0;1]$ (рис.2). И продолжим движение вправо шагами длины a (опять сдвигаясь на 1 влево в случае попадания в 1 или перескока).

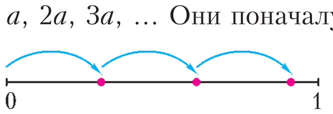


Рис. 1

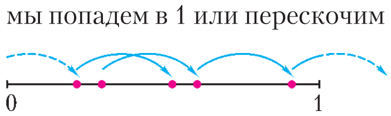


Рис. 2

Нетрудно сообразить, что наименьшее из расстояний от красной точки, полученной на k-м шаге, до концов отрезка – это расстояние от ka до ближайшего целого числа. Наша задача свелась тогда к такой: надо доказать, что какая-то красная точка окажется на расстоянии меньше чем ε от одного из концов отрезка.

Разделим отрезок $[0;1]$ на N равных отрезков, где $\frac{1}{N} < \varepsilon$, эти отрезки будем называть маленькими. Если мы сделаем больше, чем N шагов (а мы можем сделать их сколь угодно много), какие-то две красные точки попадут в один маленький отрезок (рис.3). Пусть одна из этих точек была покрашена на k-м шаге, а другая – на l-м, где $k > l$. Это значит, что $ka = c + \alpha$, $la = d + \beta$, где c и d целые, а неотрицательные добавки α и β меньше 1 и отличаются друг от друга меньше чем на ε. Тогда красная точка, полученная на шаге $k - l$, искомая: число

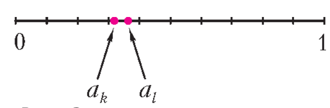


Рис. 3

$$(k - l)a = (c - d) + (\alpha - \beta)$$

отличается от целого числа $c - d$ меньше чем на ε. Следовательно, требованию теоремы удовлетворяет $M = k - l$.

Теорема для двух чисел

А как быть в случае двух чисел a_1 и a_2?

Снова для наглядности будем считать, что оба числа положительны и не превосходят 1. По аналогии со случаем одного числа теперь следует рассматривать пары (a_1, a_2), $(2a_1, 2a_2)$, $(3a_1, 3a_2)$, … Но это же просто векторы на плоскости. Первый вектор лежит в квадрате с вершинами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$. Будем идти по этому квадрату из вершины $(0;0)$, каждым шагом сдвигаясь на вектор (a_1, a_2), и красить точки, в которые попадаем (рис.4). Что делать в случае «перескока» – когда одна из координат нашей точки или даже обе достигнут или превысят 1? Понятно – сдвинуться на 1 влево, если «перескочила» единицу абсцисса, и на 1 вниз – если «перескочила» единицу ордината (если «перескочили» обе координаты, сдвигаемся на 1 и влево, и вниз).

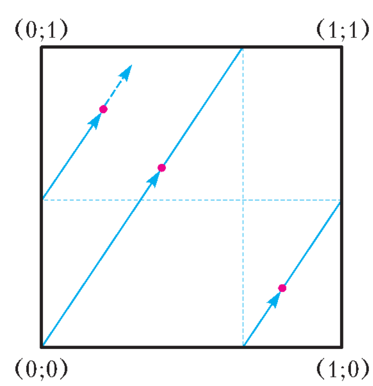


Рис. 4

Аналогично получаем, что наименьшее из расстояний от абсциссы красной точки, полученной на k-м шаге, до абсцисс вершин квадрата – это расстояние от ka_1 до ближайшего целого числа, а наименьшее из расстояний от ординаты этой точки до ординат вершин квадрата – это расстояние от ka_2 до ближайшего целого числа. И задача свелась к такой: доказать, что у какой-то красной точки оба эти расстояния окажутся меньше ε.

Как доказывать? Надо действовать аналогично случаю отрезка. Разделим наш квадрат на N^2 равных квадратиков, где $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Если мы сделаем больше, чем N^2 шагов, какие-то две красные точки попадут в один квадратик (рис.5). Пусть одна из этих точек была

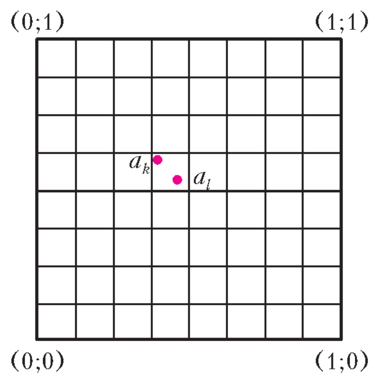


Рис. 5

покрашена на k-м шаге, а другая – на l-м, где $k > l$. Это значит, что

$$(ka_1, ka_2) = (c_1 + \alpha_1, c_2 + \alpha_2),$$

$$(la_1, la_2) = (d_1 + \beta_1, d_2 + \beta_2),$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 целые, а неотрицательные добавки α_1, α_2, β_1, β_2 меньше 1, причем α_1 отличается от β_1 меньше чем на ε и α_2 отличается от β_2 меньше чем на ε. Тогда число $(k-l)a_1 = (c_1 - d_1) + (\alpha_1 - \beta_1)$ – целое с точностью до ε и число $(k-l)a_2$ – тоже. И снова требованию теоремы удовлетворяет $M = k - l$.

n-мерное пространство

Ясно, что мы докажем теорему и для случая трех чисел: надо будет рассматривать единичный куб в трехмерном пространстве, разбивать его на кубики... А как же быть в общем случае? Надо не побояться и рассмотреть n-мерное пространство. Но что это такое? Может быть, у вас потрясающее геометрическое воображение, и вы сможете себе такое пространство представить. А если нет – не огорчайтесь. Можно действовать по аналогии. Что такое трехмерное пространство? Любая его точка задается тремя координатами. Можно считать, что трехмерное пространство – это просто множество всевозможных наборов из трех действительных чисел, т.е. множество троек вида (x, y, z).

Определим n-мерное пространство как множество всевозможных наборов из n действительных чисел, т.е. множество всевозможных «n-ок» вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_1, x_2, ..., x_n – действительные числа.

Например, четырехмерное пространство задается четверками (x_1, x_2, x_3, x_4). Что такое единичный четырехмерный куб? Это просто множество таких четверок (x_1, x_2, x_3, x_4), у которых все координаты неотрицательны и не превосходят единицы: $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1$. Его можно разбить на N^4 четырехмерных кубиков со стороной $\frac{1}{N} < \varepsilon$ и полностью перенести рассуждение из предыдущего раздела на этот случай. Попробуйте провести рассуждение во всех деталях самостоятельно.

Итак, теорему можно считать доказанной для любого количества чисел, а значит, задача о коровах снова решена.

А можно ли проще?

Но неужели эта задача решается только такими сложными методами? Нельзя ли найти подход попроще? Например, просто записать систему из 101-го уравнения от 101-й неизвестной a_1, ..., a_{101} и попробовать решить? Но мы же не знаем, какие конкретные уравнения там будут – ясно только, что каждое уравнение будет иметь такой вид: пятьдесят каких-то переменных минус пятьдесят других равно нулю. Ну хорошо, а как вообще решать такую систему? Да очень просто: выражаем одну переменную из первого уравнения и подставляем в остальные. Получим 100 уравнений, в которых фигурируют уже 100 переменных. Берем одно из них, выражаем из него какую-то переменную через остальные переменные (заметим, что выразится она как их линейная комбинация с рациональными коэффициентами) и подставляем в оставшиеся уравнения. Получим 99 уравнений от 99 переменных. И так далее. Чем же все это может закончиться?

Возможно, в каких-то уравнениях после подстановки все сократится, и они примут вид 0 = 0; не страшно. Но мы никогда не получим уравнения вида $a_i = 0$, ведь мы уже знаем, что система имеет бесконечно много решений: любой набор одинаковых чисел подходит.

В последнем уравнении, в котором не все сократится, тем самым будут хотя бы две переменные. Выразим одну из них через оставшиеся в этом уравнении: получим что-то вроде уравнения $a_i = r_j a_j$ или же $a_i = r_j a_j + \ldots + r_k a_k$, где r_j, ..., r_k – какие-то ненулевые коэффициенты (обратите внимание: эти коэффициенты, конечно же, будут рациональными). Это значит, что переменным a_j, ..., a_k мы можем придать любые значения – такие переменные называются «свободными». По их значениям мы однозначно найдем значение a_i. Подставив уже найденные значения в предыдущие уравнения, найдем значение очередной переменной, и так далее. Встречающиеся по дороге свободные переменные можно заменять любыми числами.

Итак, в итоге все переменные выразятся через конечный набор свободных переменных, которым мы можем придавать любые значения. Вопрос вот в чем: каким может быть количество этих свободных переменных? Может ли, например, их быть две или больше? Оказывается, нет. Действительно, пусть свободных переменных хотя бы две. Тогда можно придать им не одинаковые рациональные значения – например, одну взять равной 1, другую равной 2 и так далее. Но ведь остальные переменные выражаются в виде линейных комбинаций свободных переменных с рациональными коэффициентами! Это значит, что значения остальных переменных тоже будут рациональными – и мы получим решение нашей системы в рациональных числах, среди которых не все одинаковы. А это противоречит доказанному случаю для рациональных весов.

Значит, свободная переменная ровно одна, и все остальные через нее выражаются, т.е. ей пропорциональны, причем с рациональными коэффициентами. Ясно, что все эти коэффициенты пропорциональности равны 1 – иначе мы снова бы нашли решение с разными рациональными весами. Но тогда все переменные получаются равными. И снова задача решена. Все равно не так уж и просто, но более простого решения я не знаю.

Вместо заключения

На примере задачи о коровах мы с вами познакомились с несколькими очень важными понятиями в математике.

С линейной независимостью вы сталкивались в школе. Возьмем на плоскости любые два неколлинеарных вектора u и v, например $(0;1)$ и $(1;0)$. Такие векторы, во-первых, будут *линейно независимыми над* $\mathbb{R}$ – их линейная комбинация $\alpha u + \beta v$ с действительными коэффициентами α и β равна нулевому вектору только в случае $\alpha = \beta = 0$. Во-вторых, любой вектор на плоскости записывается как линейная комбинация векторов u и v – надо только выбрать подходящие коэффициенты α и β. Любой набор векторов с такими двумя свойствами называется *базисом* на плоскости. Аналогично определяется понятие базиса для трехмерного пространства и даже для n-мерного. Оказывается, справедлива замечательная теорема:

количество векторов в любом базисе n-мерного пространства всегда равно n.

Она не так проста, как может показаться, с этой теоремы фактически начинается целая наука – линейная алгебра, которую изучают на первом курсе математических факультетов. Попробуйте доказать эту теорему хотя бы для плоскости и трехмерного пространства.

Наше путешествие по отрезку $[0;1]$ шагами длины α удобно для наглядности представлять себе так, будто мы «согнули» отрезок $[0;1]$ в окружность, соединив его концы, и идем по окружности все время в одну сторону шагами длины a (длина шага – это длина соответствующей дуги). Об этом путешествии можно сказать чуть больше, чем мы уже успели.

Если число a рационально, то мы через какое-то число шагов попадем в начальную точку и далее будем ходить по тем же самым точкам, что уже покрасили к этому моменту. Оказывается, красные точки будут в этом случае расположены в вершинах правильного многоугольника.

Если же число a иррационально, мы никогда в исходную точку не вернемся – это почти очевидно. Более того, красные точки будут располагаться на окружности *всюду плотно* – это значит, что в любую дугу нашей окружности, сколь бы малой она ни была, попадет хоть одна красная точка (и даже бесконечное количество красных точек). Прежде чем читать дальше, попробуйте доказать это утверждение. Не удержусь и приведу решение, немного отличающееся от наших предыдущих рассуждений. Итак, мы шагаем по окружности шагами длины a в одну сторону, начав из точки O (рис.6). Рассмотрим момент, когда мы впервые перескочим через O.

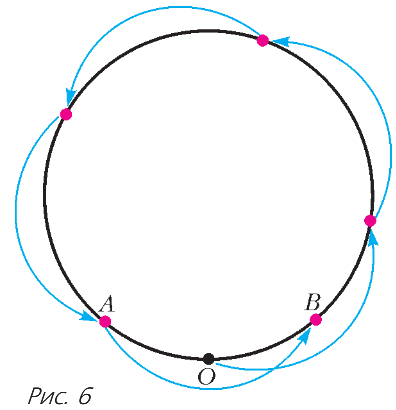


Рис. 6

Пусть A – предыдущая красная точка (до перескока), а B – следующая (после перескока). Точка O лежит на дуге AB длины a. Значит, одна из дуг OA или OB не длиннее $a/2$ – пусть это дуга OA. Итак, после некоего числа шагов мы сдвинулись от точки O по окружности в точку A на расстояние, не превышающее $a/2$. Сделав еще столько же шагов, мы, очевидно, снова сдвинемся в ту же сторону на такое же расстояние. Эврика! Можно считать, что мы теперь шагаем по окружности в одну сторону хотя бы вполовину меньшими шагами (рис.7): сдвиг на каждый новый шаг получается, если сделать определенное число старых шагов, а длина нового шага не больше $a/2$. Снова пройдя круг, можно будет уменьшить шаг еще хотя бы в два раза, и так далее. Когда-нибудь мы научимся ходить шагами меньшей длины, чем длина дуги, в которую нам надо попасть, и, значит, уж точно ее не проскочим.

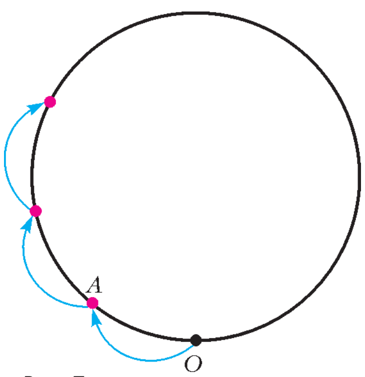


Рис. 7

Оказывается, только что доказанное утверждение можно уточнить: доля красных точек, попавших в любую выбранную дугу δ, будет пропорциональна длине этой дуги. Более точно, рассмотрим отношение

$$\frac{\text{число красных точек, попавших в } \delta \text{ за первые } N \text{ шагов}}{N}.$$

Предел этого отношения при N стремящемся к бесконечности существует и равен длине дуги δ. Это утверждение называется леммой Вейля. Из нее можно вывести множество интересных утверждений, например, найти, какая доля степеней двойки 2, 4, 8, 16, 32, 64, … начинается на 5. Сформулируйте этот вопрос строго и попробуйте найти ответ. А еще можно попытаться обобщить лемму Вейля на случай n-мерного пространства. Для $n = 2$ мы свернем квадрат в тор (так называют в математике поверхность бублика) и будем гулять по этой поверхности. Но обо всем этом – как-нибудь в другой раз.

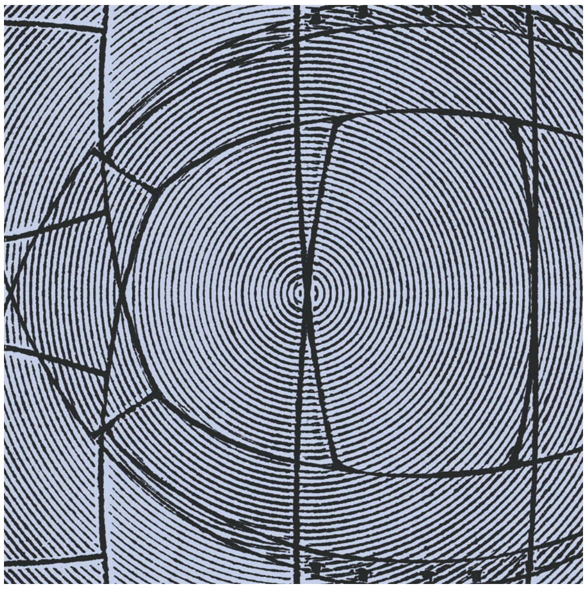
На берегу океана непознанного: иллюзия простоты

М.КАГАНОВ

ПРЕДЫДУЩИЙ РАЗДЕЛ – ЭТО ОТСТУПЛЕНИЕ. Вернемся к теме статьи.

Каждый уровень в таблице 1 по смыслу включает не только принципиально познанные объекты, но и исследования всего того, чему на этом уровне полагается находиться. Это относится и к границам материка познанного – к уровням *Вселенная* и *электроны, протоны, нейтроны*.

Сейчас речь пойдет о нижнем уровне. По идее, он охватывает область физики, в которой объектом исследования служат самые мелкие представители материального мира – элементарные частицы. Название трех из них мы поместили на схеме. Они этого заслуживают: электроны, протоны, нейтроны – строительный материал Вселенной. Все, что расположено и исследуется на более высоких уровнях, построено из них.



Раньше чем приводить список элементарных частиц, выясним, какой смысл физики вкладывают в понятие *элементарные частицы*.

Первое. Считается, что из элементарных частиц все построено, что они – мельчайшие крупицы материи. В разное время претендентами на «звание» элементарных были разные частицы. В конце XIX – начале XX веков элементарными считались *атомы*. Правда, их было слишком много. Издревле казалось, что простейших сущностей, из которых все построено, должно быть немного. А атомов было известно около ста. Сейчас, с изотопами, их открыто значительно больше.

Второе. Предполагается, что элементарные частицы истинно элементарны, другими словами просты, что они – предел дробления материи. Когда выяснилось, что атом состоит из ядра и электронной оболочки, а ядро состоит из протонов и нейтронов, атомы потеряли титул элементарных. Их титул унаследовали электроны, протоны и нейтроны.

Смена претендентов на элементарность не остановила исследований самых мелких частиц материи. С развитием техники ускорения и всего инструментария экспериментальной физики темп исследования возрос и с необычной быстротой начал приносить плоды: было открыто множество частиц, несомненно имеющих законное право располагаться на том же самом уровне, где находятся электроны, протоны и нейтроны. Второму признаку они заведомо соответствовали. Все новооткрытые частицы так и именовались – *элементарными*.

Открылся целый мир субмикроскопических частиц. Только три из них служат материалом строения составных объектов материального мира. Систематизация субмикроскопических частиц потребовала новых характеристик открытых и открываемых частиц. Стало модным использовать для наименования этих новых характеристик слова из нефизического лексикона: странность, шарм, цвет, аромат... Появились цветные, странные частицы, с шармом и без. И ко всем частицам, оказалось, надо добавить и их античастицы: античастица электрона – позитрон, протона – антипротон. И позитрон, и антипротон имеют заряды противоположного знака по сравнению с соответствующими частицами. Но есть античастицы и у нейтральных частиц: у нейтрона – антинейтрон, у нейтрино – антинейтрино. Систематизация создает иллюзию понимания, но не только. Как правило, она есть важный шаг на пути к пониманию. Для понимания очень важно привыкание, иногда привыкание заменяет понимание. Но, не будем забегать вперед.

Остановимся и еще раз взглянем на схему. На нижнем уровне всего три хорошо и давно знакомые частицы. Мы к ним привыкли. А того, что мы о них знаем, достаточно для понимания их, пожалуй, главной роли – роли строительного материала всего во Вселенной, всего, что мы разместили *над* нижним уровнем.

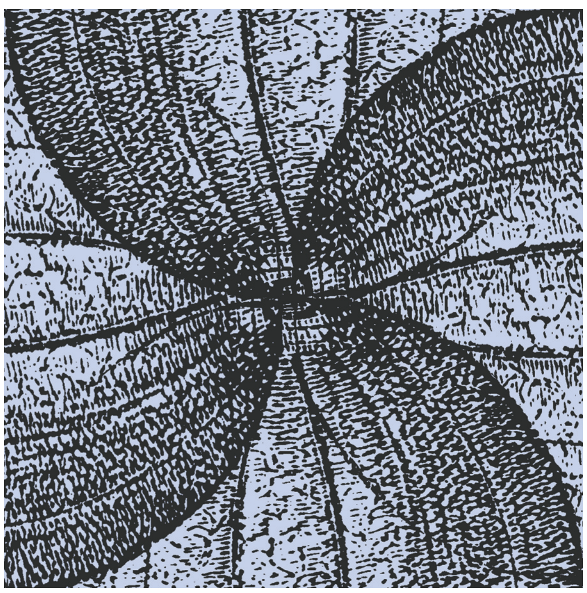
Добавим на нижний уровень *фотоны* и *нейтрино*. В мировом пространстве и тех, и других очень много. Не назвав их, мы опустили бы нечто стабильно существующее во Вселенной и, кстати, давно обнаруженное и хорошо изученное. Фотоны и нейтрино не входят в

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Иллюстрации В.Хлебниковой

виде составных частей в атомы, молекулы или в какие-либо другие сложные материальные объекты. Существуют они в виде газов, заполняя мировое пространство. Об этих газах многое известно. Особенно о газе фотонов, именуемом реликтовым излучением (о нем уже упоминалось).

Вот теперь действительно названы все частицы, из которых состоит, построен окружающий нас Мир. Правда, в последние годы все более серьезно изучают нечто, что назвали *темной материей, состоящей из темной массы* и *темной энергии*, подчеркнув тем самым отсутствие осведомленности о природе этих субстанций. Признаюсь, когда впервые услышал о том, что темная материя составляет более 90% материи Вселенной, я уверенно заявил: «Рассосется!» Но вот в прошлом году Нобелевскую премию по физике получили ученые, своими астрономическими наблюдениями и расчетами предоставившие важный аргумент в пользу существования темной энергии. Существование темной массы, похоже, тоже не вызывает серьезных сомнений. Придется об этом не забывать. Они есть – значит, принадлежат Вселенной. Но куда их отнести? Проще всего считать, что они находятся в океане непознанного. Когда мы будем заниматься самым верхним уровнем, мы вспомним о темной материи.



Вернемся на нижний уровень. Пока мы рассматриваем его как береговую черту океана непознанного. Повторим: впечатляющие открытия, происходившие в основном во второй половине XX века, заполнили этот уровень несколькими сотнями частиц и открыли среди них необычные частицы, по-настоящему странные. Стало ясно: все они не могут претендовать на титул элементарных. Их слишком много. Как они появились там? Откуда они взялись?

Метафора «береговая черта океана непознанного» будит воображение. Она напоминает об экспедициях, о Генрихе Мореплавателе. Не знаю, как вы, а я смотрю с восторгом не только на многомачтовое парусное судно, но и на небольшую яхту, когда она маневрирует у совсем неметафорического берега Антлантики, недалеко от которого я живу последние годы.

Конечно, открытие неизвестных до того частиц обходится без плавания по неизведанным морям. Для этого нужно *только* разогнать какие-либо из известных микрочастиц, заставить их столкнуться с другими частицами – подобными или другого сорта. Не только столкнуть, но и посмотреть, что из этого получится. Может ничего нового не получиться. Но иногда исследователям сопутствует удача, и им удается увидеть нечто, чего не видел никто. Из океана непознанного наиболее удачливые исследователи, как и в давние времена их далекие предшественники, привозят золото: открытие новой частицы нередко завершается Нобелевской премией.

Сравнение экспериментов по обнаружению ранее неизвестных частиц с экспедициями прошлого, открывавшими неизвестные земли, кому-то покажется кощунственным. Мне не кажется. В оправдание скажу: недавно в интернете увидел статистику по годам работ с большим числом соавторов. Рекорд принадлежит физической работе, в которой участвовали 2512 человек (2006 г.). Уверен, она была сделана на гигантском ускорителе.

Столкновения атомных и субатомных частиц бывают самые разные. Одни похожи на столкновения упругих шаров: столкнулись и разлетелись. Другие напоминают разбивание каких-либо предметов.

Разрушив молекулу, мы ожидаем, что осколками будут ее части – то, из чего она *состоит*. Молекулу сравнительно легко разделить на атомы или ионы. Следовательно, молекула состоит из атомов или ионов. От атома легче отделить оболочку из электронов, чем разделить ядро атома. Отсюда: атомы состоят из ядер и электронов. Ядра атомов состоят из нуклонов.

А как обстоит дело с элементарными частицами? Они, как мы думаем, ни из чего не состоят. Значит ли это, что столкновения между элементарными частицами всегда похожи на столкновения бильярдных шаров? Нет! Нет, хотя элементарные частицы и не могут быть разделены на составные части. Удивительное дело. С одной стороны, утверждается, что частица элементарна (т.е. проста, неделима), а с другой – что при столкновении с иной частицей (тоже элементарной!) появляются другие частицы. Любые? Нет, только такие, появление (рождение) которых не нарушает законов сохранения. Конечно, законов сохранения энергии и импульса, но не только. Сохраняются заряды, причем электрический не исчерпывает всех зарядов. Есть барионный и лептонный заряды. Барионный заряд указывает на принадлежность частицы к некому классу частиц, а именно к классу барионов – частиц типа протона и нейтрона. Лептонный заряд указывает на принадлежность к классу лептонов – частиц типа электрона, позитрона. К этому классу принадлежит и нейтрино. У протона и нейтрона барионный заряд равен +1, а у их античастиц он равен −1. Лептонный заряд у всех барионов равен нулю. Аналогично, у электрона и нейтрино лептонный заряд равен +1, а у позитрона и антинейтрино он равен −1. У всех лептонов барионный заряд равен нулю. Существуют у частиц и более экзотические характеристики. Мы их называли: цвет, странность .... Некоторые характеристики при реакциях между частицами строго сохраняются, другие могут изредка нарушаться, что приводит к различию в вероятностях появления разных частиц.

Обилие частиц на нижнем уровне, боюсь, плохо увязывается с тем, что Мир, нас окружающий, состоит только из трех частиц. Дело в том, что большинство из сотен новооткрытых частиц нестабильны – они самопроизвольно распадаются. Вот один пример. Мы уже говорили, что нейтрон в свободном состоянии распадается. Схема его распада такова:

$$\text{нейтрон} \rightarrow \text{протон} + \text{электрон} + \text{антинейтрино.}$$

У нейтрона и протона барионные заряды одинаковы, их лептонные заряды равны нулю, электрон и антинейтрино имеют лептонные заряды противоположных знаков. Все перечисленные законы сохранения, как и следовало ожидать, выполняются. Раньше, говоря о распаде нейтрона, мы не уточнили, что рождается антинейтрино. Рождалось бы нейтрино, не выполнялся бы закон сохранения лептонного заряда. Заметим, что по сравнению с сотнями новооткрытых частиц нейтрон живет очень-очень долго, а внутри нерадиоактивных ядер нейтрон и вовсе стабилен. Мы говорим об этом, чтобы вся материя не казалась нестабильной.

Итак, все частицы, кроме трех, распадаются, а фотон и нейтрино, родившись в какой-либо ядерной реакции, улетают в космос или поглощаются веществом. Они не есть строительный материал материи. А как дело обстоит с античастицами? Позитрон, антипротон и антинейтрон столь же стабильны, как электрон, протон и нейтрон. Почему же нет в природе антиматерии? Потому, что при встрече частиц и античастиц происходит их аннигиляция. Вопрос, почему же существует материя, не такой праздный, как может показаться. Почему-то при образовании Вселенной, в момент Большого взрыва или в первые мгновения после этого, родилось больше частиц, чем античастиц. Преимущество частиц над античастицами сохранялось, что бы потом ни происходило. Постепенно античастицы «вымерли». Сохранились только частицы. То, что античастицы – не выдумка, подтверждается экспериментом. Позитрон был открыт при исследовании космических лучей. Не из глубин Вселенной прилетел он, а появился на свет в результате столкновения первичной частицы с каким-нибудь из атомов земной атмосферы. В лабораториях античастицы рождаются при столкновениях и распадах наряду с частицами. Если их уберечь от встречи с частицами, то можно сделать античастицы участниками экспериментов и создать антиатомы. Это сделано! А вот понять, почему при рождении Вселенной нарушилась симметрия между частицами и античастицами, насколько я знаю, не удается.

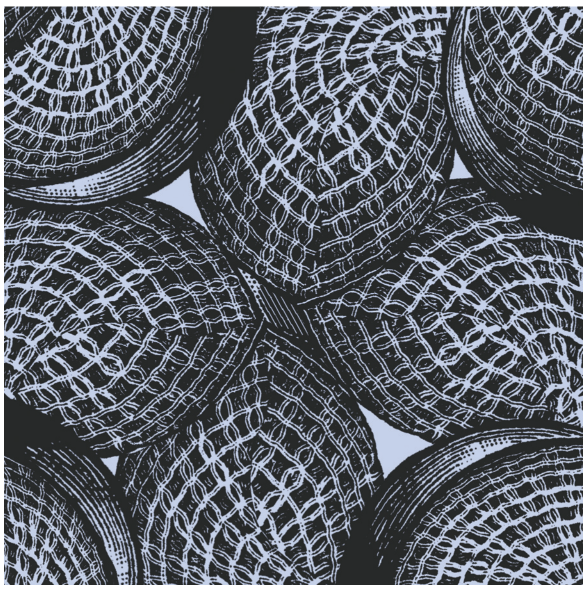
То, что мы поместили фотоны на нижний уровень, оправдано тем, что в космическом пространстве существует газ фотонов (реликтовое излучение). Он есть. Есть в космическом пространстве и нейтрино. Фотоны не служат строительным материалом материи, но в возникновении из элементарных частиц структур они играют важную роль – они осуществляют взаимодействие между заряжеными частицами.

В этом месте чуть задержимся, чтобы вдуматься. Теория относительности утверждает, что никакой сигнал не может распространяться быстрее, чем свет. Значит, в природе не может быть дальнодействия. А как же закон Кулона, согласно которому сила, действующая между двумя зарядами, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними? Чуть сдвинули один из зарядов, сила между ними изменилась. Получается, второй заряд мгновенно «почувствовал» изменение силы? Такого быть не может. И такого нет. Дело в том, что закон Кулона, строго говоря, точен для неподвижных частиц. Если частицы движутся, закон Кулона справедлив приближенно – тем лучше, чем скорость движения зарядов друг относительно друга меньше. Сравнивать надо скорости частиц со скоростью света. Говорят так: закон Кулона – нерелятивистский предел более точного выражения, получаемого в *квантовой электродинамике*. Строго и удивительно точно закон Кулона описывает *электростатическое* взаимодействие. «Удивительно» употребил я вполне осознанно. По-моему, несомненно заслуживает удивления существование точного закона, который справедлив и на космических расстояниях, и внутри атомов. Таков закон Кулона.

Как же описывает квантовая электродинамика взаимодействие заряженных частиц друг с другом? Хотя вывод формул требует применения вполне серьезных математических вычислений, понять природу взаимодействия между зарядами не слишком трудно. Квантовая частица не остается в покое, она флуктуирует, т.е. колеблется возле своего положения равновесия. Колеблясь, заряженная частица излучает фотоны. Строго говоря, на это у нее нет энергии, но это ничего. Заряд не только испускает фотоны, но и поглощает. Испущенный фотон почти сразу будет поглощен, и нарушения закона сохранения энергии не произойдет. Фотоны, о которых мы говорим, называют *виртуальными*. Если на некотором расстоянии от одного заряда есть еще один заряд, то поглотить виртуальный фотон может не тот заряд, который его испустил, а другой. Но и он испускает фотон, который может поглотить не он. Происходит как бы обмен виртуальными фотонами. Это вполне реальный процесс, который изменяет энергию системы из двух электронов, причем энергия взаимодействия обратно пропорциональна расстоянию между зарядами, а тем самым сила взаимодействия между ними обратно пропорциональна квадрату расстояния. Вычисления показывают – знак силы такой, как требует закон Кулона: одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Кулоновское (электростатическое) взаимодействие не единственное между субатомными частицами. Нуклоны в ядрах притягиваются друг к другу с такой силой, что преодолевают отталкивание одноименно заряженных протонов друг от друга. Взаимодействие между нуклонами официально назвали *сильным*. Почему же, если оно так велико, оно нами не ощущается?

Потому, что сильное взаимодействие вообще не проявляется на макроскопических масштабах. Оно действует только на ядерных масштабах: если расстояние между частицами порядка 10^{-15} м или меньше, оно действует, а если расстояние заметно больше, то нет. Казалось бы, мало общего с электростатическим взаимодействием – например, нуклоны только притягиваются. Да, совсем мало общего, но все же есть. Сильное взаимодействие – тоже результат обмена виртуальными частицами. Нет, не фотонами, конечно, а *настоящими* частицами. Настоящими только в том смысле, что масса частиц, ответственных за сильное взаимодействие, не равна нулю, как у фотона. Предсказал их существование японский физик Хидэки Юкава в 1935 году, а в конце 40-х годов его предсказание подтвердилось – предсказанные частицы были открыты и получили названия π-*мезонов*. Греческую букву π добавили, так как ранее был открыт мезон, который обозначали греческой буквой μ, первой буквой древнегреческого слова μεσοζ – промежуточный, средний. Почему добавили именно букву π, не знаю. Обе частицы назвали мезонами, т.е. промежуточными, средними, так как их массы больше массы электрона и меньше массы протона. Масса μ-мезона приблизительно в 207 раз превышает массу электрона, а π-мезона – в 273 раза, тогда как протон в 1800 раз тяжелее электрона. Часто μ- и π-мезоны называют мюонами и пионами. В 1949 году за предсказание существования мезонов Юкава был удостоен Нобелевской премии по физике.



Массу π-мезона Юкава предсказал довольно точно. Он знал, что сильное взаимодействие затухает с расстоянием экспоненциально, а между радиусом взаимодействия r_n и массой частицы-переносчика m существует простое соотношение: $m \sim \hbar/(r_n c)$. Здесь $\hbar$ – постоянная Планка, а c – скорость света. Если подставить значения величин, окажется, что значение m неплохо совпадет с массой π-мезона. Хотя мезоны притягивают любые нуклоны, а их два – протон и нейтрон, мезонов оказалось три: два заряженных (с зарядами $+e$ и $-e$) и один нейтральный. Массы заряженных π-мезонов несколько больше массы нейтрального.

Все π-мезоны естественно поместить на нижний уровень схемы таблицы 1, как фотоны и нейтрино.

Соотношение между радиусом взаимодействия и массой частицы, которая осуществляет взаимодействие, объясняет, почему кулоновское электростатическое взаимодействие так медленно затухает с расстоянием, что проявляет себя в макромире: у фотона масса равна нулю, а при $m = 0$ радиус взаимодействия равен бесконечности.

Ясно, что если есть *сильное* взаимодействие, то должно быть и *слабое*. Оно действительно есть, и мы о нем уже говорили, не называя его. Оно проявляет себя в описанном нами распаде нейтрона. Понимаю, что звучит несколько странно: взаимодействие проявляет себя в распаде. Но представьте себе, что произошел обратный процесс: столкнулись протон, электрон и антинейтрино и образовали нейтрон. Тут вполне уместно добавить: благодаря слабому взаимодействию.

В далекий 1934 год Энрико Ферми построил теорию β-распада на основе предсказанного им распада нейтрона. Более десяти лет прошло до того, как распад нейтрона был открыт. Согласно теории Ферми, чтобы слабое взаимодействие себя проявляло, все частицы должны находиться в одной точке. Правда, тогда термина *слабое взаимодействие* еще не было. Во второй половине прошлого века слабое взаимодействие привлекало к себе внимание. Теперь теория слабого взаимодействия кардинально изменилась. *Теорию* Ферми даже переименовали в *модель* Ферми, чем понизили ее ранг. Отметим два обстоятельства.

Первое. Слабое взаимодействие обрело радиус действия, и были открыты частицы-переносчики. Их назвали W- и Z-мезонами. Называть их мезонами вроде странно: они почти в 100 раз тяжелее протона. Значит, радиус действия слабого взаимодействия значительно меньше радиуса сильного взаимодействия примерно в 100 раз. Эти W- и Z-мезоны, естественно, попадают на нижний уровень.

Второе. Оказалось, что два таких непохожих взаимодействия – электромагнитное и слабое – есть различные проявления единого взаимодействия. При энергиях выше энергии объединения (она порядка 10^2 ГэВ) оба взаимодействия, электромагнитное и слабое, сливаются в единое *электрослабое взаимодействие*. Между частицами-переносчиками есть распределение обязанностей: переносчики электромагнитного взаимодействия – это фотоны и W-мезоны, а слабого взаимодействия – W- и Z-мезоны. То, что у них есть общий переносчик, демонстрирует единство двух взаимодействий.

Объединение электромагнитного и слабого взаимодействий похоже на хорошо известное со времен Фарадея и Максвелла объединение электрических и магнитных свойств в электромагнитные. В статических условиях электрические и магнитные свойства не связаны между собой. Когда-то и не предполагали, что существуют электромагнитные волны.

Успех объединения электромагнитного и слабого взаимодействий добавляет оптимизма попыткам объединить все фундаментальные взаимодействия в одно, истинно фундаментальное, которое по-разному проявляет себя в разных условиях (при разных энергиях). Всех взаимодействий всего четыре, а теперь стало три: электрослабое, сильное и гравитационное. Похоже, для *великого объединения* – именно так именуют объединение трех взаимодействий без гравитационного – предстоит еще много экспедиций по океану непознанного.

Конечно, создание теории электрослабого взаимодействия – замечательное достижение. Оно в 1979 году отмечено Нобелевской премией по физике, которую присудили ее творцам Шелдону Ли Глэшоу, Стивену Вайнбергу (США) и Абдусу Саламу (Индия). Но, должен признаться, на меня более сильное впечатление произвело другое событие: открытие *кварков*. Происходящее в физике элементарных частиц в 60-е – 70-е годы прошлого века волновало многих, даже тех, кто работал в совсем другой области, как и я. Открытие новых частиц вызывало интерес. Выяснилось: новооткрытые частицы, их свойства, взаимодействия, распады упорядочиваются, а нуклоны занимают естественное место в многообразии новооткрытых частиц, если предположить, что нуклоны и новооткрытые частицы не элементарны, а состоят из частиц, которых никогда никто не наблюдал. Их-то и назвали кварками. Естественно, возникли дискуссии: существуют кварки или они лишь удобная математическая модель? К гипотетическим (пока) субнуклонным частицам привлекало все: от никогда не встречавшегося дробного электрического заряда (он кратен $e/3$, где e – заряд электрона) до названия. В 1969 году американский физик-теоретик Мюррей Гелл-Манн получил Нобелевскую премию по физике за открытие классификации новооткрытых элементарных частиц, а также их взаимодействия между собой и с нуклонами. Классификация получила название *восьмеричный путь*, взятое из буддизма. Теоретики (прежде всего Гелл-Манн, но не он один) поняли, что эту закономерность можно обосновать тем, что некоторые элементарные частицы (среди них нуклоны) состоят из более фундаментальных структурных единиц. Их-то Гелл-Манн и назвал кварками.

Восьмеричный путь, буддизм, кварки... Романтика сопровождала и без того интереснейшие открытия. Начались безуспешные поиски свободных кварков – вне «бывших» элементарных частиц. Где только их ни искали... Но поиски оказались безуспешными. А реальность кварков внутри частиц делалась все более очевидной. Число кварков увеличилось. Их свойства уточнились, выяснилось, что из себя представляют частицы-переносчики. Их назвали *глюонами*, от английского слова glue – клей. Очень удачное название: они так склеивают кварки, что расцепить их не удается. Вне частиц они всегда склеены, в частности так, что заряд их равен в точности заряду электрона или протона. Глюоны наблюдать в свободном полете, похоже, тоже не удается, но есть факты, которые служат, по словам специалистов, строгим доказательством существования глюонов.

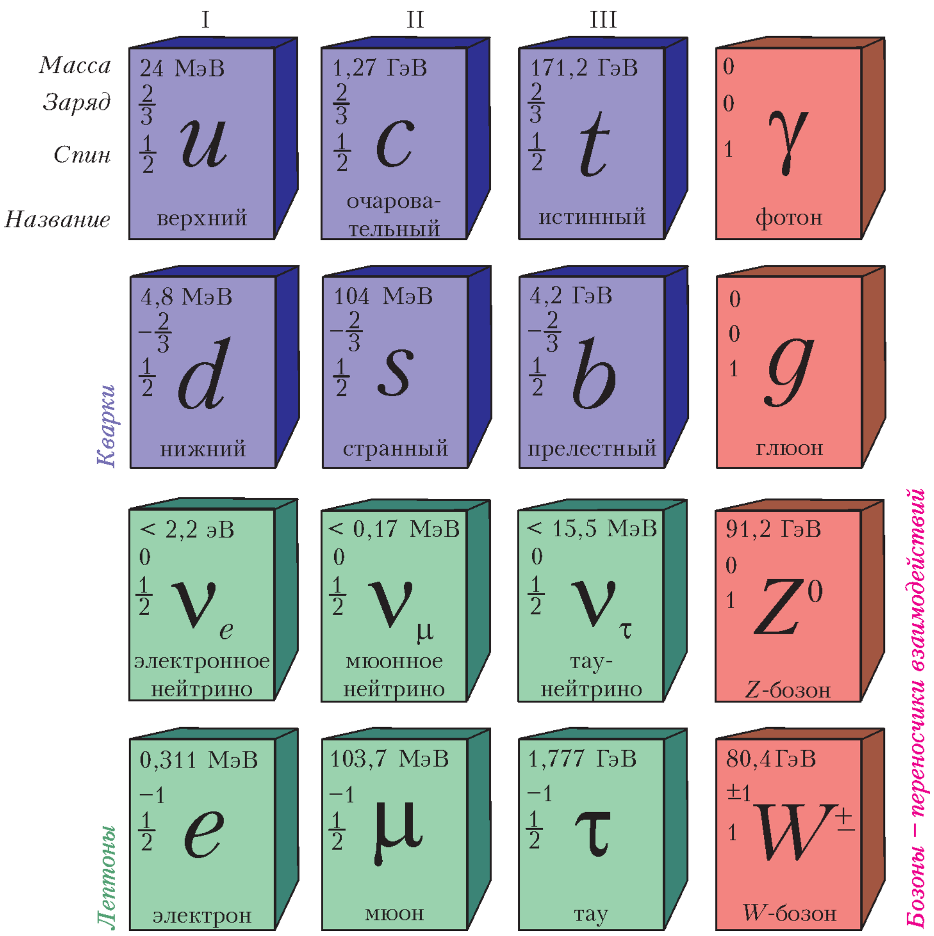
Понимание свойств кварков и глюонов позволило создать новую науку. Она названа *квантовой хромодинамикой* – КХД. Основанная на квантово-механических принципах, КХД описывает подавляющее большинство экспериментальных фактов, относящихся к наиболее (на сегодняшний день) глубокому уровню строения материи. Объекты квантовой хромодинамики – частицы, которые в настоящее время принято считать элементарными. Название *хромодинамика* – от древнегреческого *цвет*. Разными цветами называют специфические заряды кварков и глюонов. Цвета кварков не имеют отношения к обычному цвету. Выбор наименований оправдан тем, что смесь цветов трех кварков, составляющих нуклоны, бесцветна. Цветные заряды кварков и глюонов ответственны за сильное взаимодействие – аналогично тому, как заряды электрона и протона ответственны за электрическое взаимодействие.

В целом, можно сказать, что кварковая модель и все, что из нее вытекает (в частности, КХД), – наиболее общепринятая теория строения адронов (так называют частицы, подвластные сильному взаимодействию), которая способна объяснить имеющиеся экспериментальные данные. Другой попросту нет.

Кроме кварков и глюонов на новый, ныне самый нижний уровень надо перенести электрон, μ-мезон, и новооткрытый τ-мезон вместе со своими нейтрино. У каждого из лептонов *свое* нейтрино. К элементарности лептонов пока претензий нет. Частицы, которые принято считать элементарными, в кварково-лептонной теории – точки. Позже мы упомянем теорию, пытающуюся отказаться от этого предположения.

На рисунке, взятом из статьи в Википедии, обозначены все частицы, которые считаются элементарными. Это шесть кварков, они носят названия u, d, c, s, t, b – по первым буквам английских слов up, down, charm, strange, top, bottom. Протоны, нейтроны, ядра всех атомов, все, что мы видим, чем пользуемся, и мы сами – все состоит из самых легких u и d кварков; остальные рождаются только на короткое время при столкновении частиц на ускорителях при высоких энергиях. Из шести лептонов, которыми являются электрон, мюон, τ-лептон и три типа соответствующих нейтрино, в обычной материи встречаются толь-

Три поколения материи



ко электроны, входящие во все атомы. Заметим, что μ- и τ-мезоны перестали называться мезонами. Они – подобия электронов, только заметно более тяжелые. «Лишние» кварки и лептоны, которые не встречаются в природе, нужны не «для полноты животного царства», они влияют на реальный мир и необходимы для того, чтобы понять, как реальный мир устроен. Правда, чем «занимаются» мюон и тау-лептон, я не знаю. Наверное, истинным специалистам в теории элементарных частиц это известно. Одно мне понятно: вся картина субмикромира при их участии поражает своей симметрией. В правом столбце приведенного рисунка помещены переносчики электрослабого и сильного взаимодействий. Для гравитационного взаимодействия места пока не нашлось. Большинство физиков-специалистов уверены, что гравитационное взаимодействие переносит особая частица – гравитон, масса которой, как у фотона, равна нулю, а спин равен 2. Но квантовой теории гравитации пока нет, и гравитоны еще не обнаружены.

За сильное взаимодействие ответственны кварки и глюоны. А как же π-мезоны? Их роль во взаимодействии нуклонов может быть *выведена*, исходя из знания строения нуклонов и самих π-мезонов из кварков.

Теперь мы можем окончательно выбрать, кого поселить на нуклонно-электронный уровень: протоны, нейтроны, электроны, фотоны, нейтрино и π-мезоны. Правда, это уже не самый нижний уровень. Под ним – кварковый. Береговая черта материка познанного заметно сдвинулась. Разрешим себе и на ныне самый нижний уровень поместить электроны, нейтрино и фотоны. Ведь мы знаем, что без них не «построишь» электрослабое взаимодействие. На нынешнем втором «этаже» они выступают в другой роли: без электронов нет атомов и, значит, всего сущего, а газы фотонов и нейтрино просто *есть* в космосе.

Картина, которую мы нарисовали (как вы догадываетесь, довольно грубо), носит название *Стандартной модели микромира*.[1] Она так хорошо описывает эксперименты, что физики-теоретики выражают недовольство: трудно найти, «к чему придраться», что подскажет, как двигаться дальше.

Может возникнуть вопрос: зачем? Прежде всего, маячит более глубокое понимание. Пока не удалось построить великое объединение. Теоретики уверены, что электрослабое и сильное взаимодействия – разные проявления одного более фундаментального. Настолько уверены, что заставили поверить и экспериментаторов, которые упорно ищут следствия великого объединения. В частности, конечности времени жизни протона. Если великое объединение существует, то, как обратил внимание Андрей Дмитриевич Сахаров, протон должен распасться на более легкие частицы. Правда, время распада по оценкам очень велико. Похоже, даже больше, чем согласно сделанным оценкам. Во всяком случае, пока распад протона не обнаружен.

А ведь есть и более амбициозная цель – *теория всего*. Это официальное название теории, которая призвана объединить все четыре взаимодействия, т.е. с тремя взаимодействиями, действующими в микромире, связать гравитационное, управляющее движением планет, звезд и знакомое нам не по учебникам, а с самого раннего детства по набитым синякам и шишкам. Есть ли возможность представить себе, как далеко в океан непознанного надо продвинуться в надежде достичь желанной цели? Переход от изучения атома к изучению строения нуклона означает переход от объектов размера ~ 10^{-10} метра к объектам размера ~ 10^{-15} метра. О каких масштабах надо думать, если пытаться создавать теорию всего?

---

[1] Эта статья была написана до открытия бозона Хиггса, который, по мнению специалистов, должен увеличить надежность Стандартной модели микромира. Подробнее об этом бозоне рассказывается в статье В.Рубакова (в этом номере журнала). (*Прим.ред.*)

Будем исходить из того, что теория всего должна строиться, как и все предыдущие теории, на основе теории относительности и квантовой механики. Мы уже отмечали: пока физики не встретились с фактами, которые заставили бы сомневаться в такой возможности. Теория гравитации Эйнштейна, или общая теория относительности, – релятивистская, но по самой своей сути классическая наука, не учитывающая квантовые эффекты. Но ведь пространство-время – физический объект, значит, и его свойства *должны* быть подчинены квантовым законам. Хотя, несмотря на многие попытки, до сих пор не удалось проквантовать пространство-время, квантовая теория гравитации *должна* существовать, и мы можем даже (!) оценить, на каких масштабах должна проявиться квантовая природа гравитации. В нашем распоряжении три мировые константы: постоянная Планка $\hbar$, скорость света c и гравитационная постоянная G. Их значения приведены в таблице 3 (в первой части статьи). Из них можно построить комбинацию с размерностью длины – *планковскую длину* $L_P = \left(\hbar G/c^3\right)^{1/2}$. По порядку величины планковская длина равна 10^{-35} метра, т.е. на двадцать порядков меньше, чем размер нуклона. В масштабе планковской длины нуклон занимает огромное пространство, в котором находятся кварки и глюоны. Можно ли их с точностью, какой требует планковская длина, считать точками? Не знаю. И, думаю, пока никто не знает.

Параллельно другим направлениям теории элементарных частиц активно развивалась *теория струн*, в которых элементарные частицы – линейные объекты масштаба планковской длины. Бурно развиваясь, теория струн превратилась в самостоятельную дисциплину, не имеющую выхода к эксперименту. Возможно, пока… Признаюсь, я так далек от проблем теории струн, что, строго говоря, не имею права даже на эти несколько строк о теории, которой занято много талантливых физиков-теоретиков и математиков.

Прежде чем покинуть нижние уровни, подведем нечто вроде итога. В таблице на приведенном рисунке шесть кварков. Два, самых легких, служат «кирпичами». Из них построены протон и нейтрон. Из них и из более тяжелых кварков построены все те сотни частиц, которые называют элементарными. Чему удивляться? Ядра атомов, а их с учетом не только стабильных изотопов, но и радиоактивных, известно более 2000, все построены из частиц всего двух типов – протонов и нейтронов. А кварков в распоряжении природы втрое больше. Но…

Но претерпели изменение, казалось бы, такие вполне очевидные понятия, как *составная часть, состоит из…* Можно ли считать, что нуклоны состоят из кварков, а кварки – составные части нуклонов, если они вне нуклонов или других адронов просто не существуют? Да и что это за строительный материал – четыре тяжелых кварка, если они неустойчивы и почти мгновенно распадаются на более легкие частицы?

Еще одно непривычное обстоятельство: некоторые кварки тяжелее адронов, «частью которых являются». Значит, между кварками притяжение очень велико. Оно, действительно, такое, что *дефект масс* ликвидирует это несоответствие.

Есть в кварково-глюонной теории и технические сложности: не работают в КХД многие методы расчетов, прекрасно зарекомендовавшие себя в электронно-фотонной квантовой электродинамике. Развитие вычислительной техники, думаю, помогает с этой трудностью справляться.

Теория – создание человеческого ума. Она должна нечто объяснять, для этого она создается. Но, как всякое человеческое творение, теория должна к тому же нравиться. Как часто, хваля теорию, произносится: «Она красивая!» Слова эти служат убедительным аргументом в пользу новой теории. При всей элегантности *Стандартной модели микромира* она не безупречна с эстетической точки зрения: слишком много в ней параметров, *подобранных* так, чтобы нуклоны, электроны, носители взаимодействий – все, что измерено и служит строительным материалом для Вселенной, было следствием этой модели.

Зная, куда в океан непознанного стремится мысль теоретиков, понимаем, что кварково-глюонная теория близка к берегу материка познанного. Если уж здесь открылось столько совсем нового, то что можно ожидать на пути к *теории всего*! Колумб, желая найти путь в Индию, открыл Америку. И не надо забывать, что руководило им понимание научной истины: он *знал*, что Земля – сфера. Лишь немногие в XV веке могли задумать экспедицию, основываясь на этом научном факте.

* * *

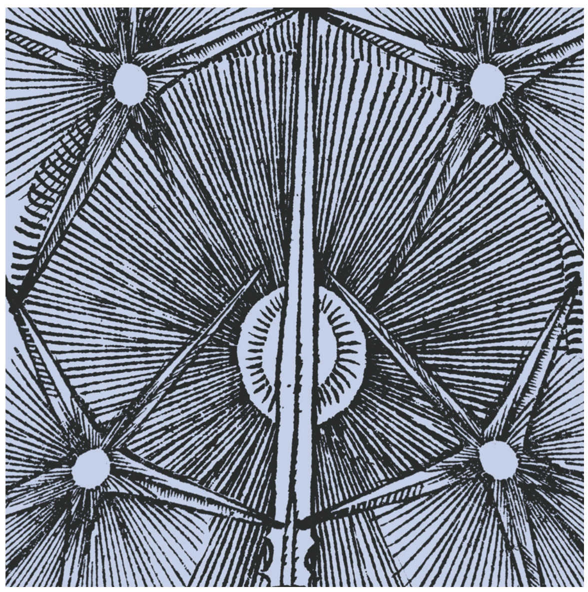
Теперь перейдем к самому верхнему уровню – *Вселенная*.

Добавить какие-либо уровни, примыкающие к самому верхнему, казалось бы, можно только *под* ним: ведь верхний уровень содержит *все*. Однако, будем осторожны с выводами.

Как уже упоминалось, сравнительно недавно я познакомился с научными терминами, которые меня смутили не только тем, что в них присутствует эпитет «темная»: *темная материя,* состоящая из *темной энергии* и *темной массы*. Ясно: обозначенное этими терминами, невидимо, т.е. не излучает и не отражает электромагнитные волны. Конечно, лучше давать название не по отсутствующему свойству, а по свойству, которое есть. Первооткрыватели почувствовали, скорее всего, что не понимают, с чем они столкнулись, и хотели откровенно признаться в этом. Мое смущение, а вначале и недоверие, вызывало то, что темная энергия и темная масса составляют *подавляющую часть массы-энергии Вселенной.* Как тут не смутиться? Неужели наше знание, которое охватывает столь разнообразные структуры, заполняющие необозримый океан познанного, позволяющее понять самые причудливые явления природы, это всего лишь малая доля будущего знания о природе? Может быть, действительно так. Но не будем забывать, что современная наука консервативна: никто не отнимет и не изменит добытого знания, а темная материя проявляет себя таким образом, что, похоже, никогда человеку не придется вступить с ней в непосредственный контакт. Это не значит, что человечество оставит попытки понять, что из себя представляет темная материя? Нет, конечно!

О темной материи уже можно прочесть не только в оригинальных статьях и научных обзорах, но и в научно-популярных журналах. Я ограничусь несколькими фразами. Темная материя проявляет себя только по гравитационному воздействию в космических масштабах, причем темная энергия и темная масса проявляют себя различно.

Темная энергия заполняет все космическое пространство, и ее носитель по предположению обладает удивительным свойством – антигравитацией, благодаря чему расширение Вселенной ускоряется. Согласно теории, Вселенная возникла в результате Большого взрыва приблизительно 14 миллиардов лет назад и с тех пор расширяется, при этом разлет всего, что в ней образовалось, происходит со скоростью, пропорциональной расстоянию между космическими объектами. Чем дальше они друг от друга, тем скорость больше. Предполагали, что можно будет обнаружить уменьшение скорости разлета, вызванное притяжением космических объектов. Обнаружили... совсем не то: скорость не уменьшается, а возрастает. Нобелевская премия по физике в 2011 году присуждена трем астрономам – Солу Перлмуттеру, Брайану Шмидту и Адаму Риссу – за открытие ускоренного расширения Вселенной посредством наблюдения дальних сверхновых звезд. Значение открытия подчеркивается тем, что астрономия не входит в перечень наук, удостаивающихся Нобелевской премии. Несомненно, было принято во внимание то, что открытие – очень важный шаг в понимании физической природы истории Вселенной.



Темная масса неоднородно распределена в пространстве. Она есть там же, где и видимые объекты в виде гало вокруг галактик и их скоплений. Присутствие ее обнаруживается по скорости вращения наблюдаемых объектов. Но не только по вращению. Многие из космических объектов играют роль *гравитационных линз*, искривляя световые лучи – следствие общей теории относительности, предсказанное Эйнштейном. Действие гравитационной линзы зависит от распределения массы – безразлично, видимая она или темная. Гравитационные линзы подтверждают существование гало из темной массы.

Итак, есть все основания считать, что темная материя существует. Куда ее поместить? Казалось бы, ниже верхнего уровня (ведь он должен содержать *все*). Но при этом структура схемы будет нарушена: мы не знаем, из чего темная материя состоит. Оставим темную материю вне схемы. Может быть, пока.

* * *

Есть научные события, которые потрясают даже тогда, когда совершенно не затрагивают твою жизнь, жизнь твоих близких и даже вообще людей. Одно из таких событий (точнее, цепочки событий) – выяснение того, что было время, когда ничего не было, того, что Вселенная возникла в результате Большого взрыва, того, что возможен научный сценарий развития Вселенной, уверенность в том, что есть наблюдаемые следы происшедшего в первые моменты после Большого взрыва и среди них есть наиболее впечатляющий след – реликтовое излучение. Не знаю, как других, но меня все это потрясло. Даже на того, кому не по силам разобраться в логике научных посылок и следствий из них, уверен, произведет сильное впечатление книга Нобелевского лауреата Стивена Вайнберга (о нем уже говорилось) «Первые три минуты» с подзаголовком «Современный взгляд на происхождение Вселенной». Аннотация книги заканчивается словами: «Для читателей, интересующихся проблемами космологии». Таких, которые заинтересовались, и не только названием, оказалось много: книга стала мировым бестселлером.

Серьезное обсуждение космологии – за рамками этой статьи. Но несколько фраз все же позволю себе.

Так как образовавшаяся Вселенная в первые мгновенья невообразимо горяча, возникшие в ней частицы обладают энергиями, которые невозможно достичь на ускорителях и вообще в земных условиях. Частицы сталкиваются, происходят реакции, результаты которых может предсказать теория. Теория, к тому же, может предсказать, как будут развиваться события по мере остывания Вселенной. Какие-то продукты реакции выживут и, синтезируясь, создадут все то, что указано в таблице 1. Свойства этих объектов, явления, которые с помощью современной теории могут быть объяснены, не только показывают, справедливы или нет наши предположения и выводы, но и дают возможность установить, как ведут себя частицы в столь важных для теории экстремальных условиях. *Вселенная стала уникальной лабораторией физики элементарных частиц.*

Произошло это не сразу. Оценки показывают, что должно было пройти время порядка 10^{-35} секунды, прежде чем Вселенная вступила на тот путь, первые три минуты которого описаны в книге Стивена Вайнберга. С трудом я заставил себя употребить обычные слова: *не сразу*, *прежде* и *пройти* к столь незначительному интервалу: 10^{-35} секунды! Но лишь мелькнул этот интервал, и все, что происходило дальше, подчинялось законам, которые действуют до сих пор, которые были сформулированы на Земле людьми, совсем недавно ступившими на Луну – на ближайшее к Земле космическое тело, на спутник Земли. Рассмотреть, что происходило в первые мгновения, не удается не потому, что тогда не действовали земные законы (так, по-моему не думает никто), а потому, что не умеют пока объединить общую теорию относительности и квантовую механику – создать *квантовую теорию гравитации*. Мы по этому поводу уже сетовали.

Необходимость создания квантовой теории гравитации возрастает. В квантовой теории рождение новых физических объектов – не редкость. Надо, конечно, чтобы были выполнены законы сохранения, но фотон может «дать жизнь» электрону и позитрону, частице и античастице. Откуда они появились? «Из вакуума», – отвечают физики. Для релятивистской квантовой механики *вакуум* не пустота, не ничто в житейском смысле слова, а наинизшее по энергии, основное состояние всех материальных частиц, которые существуют, т.е. *всего*. Согласно идеологии релятивистской квантовой механики, свободный электрон не «падает» в состояния с отрицательной энергией (а они у электрона есть!) потому, что все состояния с отрицательной энергией заняты. Они составляют вакуум. Двух электронов в одном состоянии быть не может. Это запрещено одним из строгих следствий квантовой механики – принципом Паули. А вот если какой-нибудь электрон с отрицательной энергией поглотит энергию фотона и будет из вакуума извлечен, то вместе с ним появится свободное место – дырка. Она ведет себя как положительно заряженная частица. Это – позитрон. Такую картину нарисовал Поль Дирак для разъяснения факта стационарного состояния электрона с наименьшей положительной энергией.

Упоминание о рождении электрон-позитронных пар служит для того, чтобы сказать: если рождение Вселенной происходит по квантовым законам, то следует считать, что *родилась Вселенная из вакуума*. Значит ли это, что до рождения Вселенной, тогда, когда реально не было ничего, не существовало ни материи в известных нам формах, ни пространства и времени, *в потенции было все*? А каковы законы, которым *будет подчиняться Мир*, когда он родится и по которым рождается? Они *были* до всего, что произойдет потом?

Я не знаю ответов на эти вопросы. Боюсь, эти вопросы навсегда останутся без ответа. Возможно, каждый будет искать ответ самостоятельно...

С другой стороны, кое-что о квантовом вакууме Вселенной можно считать с большой долей вероятности известным. По-видимому, вакуум – весьма необычная субстанция. В частности, очень вероятно, что он обладает антигравитацией. Если так, то именно *вакуум и есть темная энергия*. Он, вакуум, проявляет себя только тем, что ускоряет расширение. Но если это так, то вакуум наблюдаем! Мне кажется, сейчас такова господствующая точка зрения. А вот о темной массе, по-моему, известно еще меньше. Предположение о сверхтяжелых нейтрино или о каких-то других ни с чем не взаимодействующих частицах представляется фантастичным. Однако, вся история науки убеждает, что необычность, даже фантастичность новой теории не аргумент против нее, а, скорее, доказательство ее правильности. Время покажет.

* * *

Ну вот, я сказал почти все, что хотел. Верю, что читатель вместе со мной побывал на берегах океана непознанного. А вот об иллюзии простоты прямо не сказано. Думаю, несколько слов надо добавить. Простота – не объективное понятие. Конечно, объединение разных взаимодействий упростит картину мира, но какой ценой достигается объединение? У меня закрадывается крамольная мысль: если бы можно было «остановиться» на том уровне, где всего три частицы: протон, нейтрон и электрон, то для меня Мир был бы проще, чем теперь, когда я знаю, что под этим уровнем находятся кварки, глюоны, лептоны и океан непознанного манит новыми открытиями. А самый верхний уровень?! Как я радовался, что Вселенная – весь Мир – доступен изучению. И такое разочарование: темная материя. Не очень похоже, что вот-вот все станет простым. Оказывается, на материке познанного находится лишь малая доля того, что есть....

Последнее время я много думал, пытаясь осознать современную картину неорганического мира. Поэтому, возможно, более часто, чем нужно, использовал в этой статье первое лицо единственного числа. Я излагаю свое видение. У других физиков оно может быть другим.

* * *

Немного о посвящении статьи. Липа Натанович Розенцвейг – мой близкий друг, он умер, когда мы оба были молоды. Талантливый физик-теоретик, он не успел полностью проявить свои способности. Последние годы своей жизни он был занят проблемой красного смещения – эффекту, послужившему доказательством расширения Вселенной. У него была своя точка зрения на красное смещение, она не совпадала с принятой. Он не считал, что Вселенная расширяется. Думал, что при распространении из далеких областей Вселенной фотоны «стареют» – теряют энергию из-за рассеяния на флуктуациях плотности материи в космическом пространстве и что это и приводит к красному смещению. Очень трудоемкий расчет Липа Натанович не довел до конца. В настоящее время, похоже, обнаружены факты, которые противоречат теории старения фотонов. Тогда такие факты не были известны.

* * *

Я выражаю искреннюю благодарность А.И.Гордону, З.И.Кагановой, И.М.Кагановой, М.Л.Литинской, которые прочитали статью до публикации и высказали свои замечания. Замечания были мне полезны, и я их постарался учесть.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–6–2012» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2276» или «Ф2283». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2278–М2281, М2285 предлагались на заключительном этапе XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике, задача М2276 – на XV Кубке памяти А.Н.Колмогорова, задачи М2283, М2284 – на VII Южном математическом турнире.

Задачи М2276–М2285, Ф2283–Ф2292

М2276. На клетчатой доске отмечено несколько клеток. Ладья ходит только по отмеченным клеткам (возможно, перепрыгивая через неотмеченные). Известно, что эта ладья может дойти от любой отмеченной клетки до любой другой за два хода. Докажите, что существует горизонталь, на которую ладья может попасть из любой отмеченной клетки за один ход. (Напомним, что ладья ходит по горизонтали или вертикали на любое число клеток.)

С.Волчёнков

М2277. Пусть $k \ge 2$ – натуральное число. Найдите все натуральные n такие, что число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots$ $\ldots + \left(2^k - 1\right)^n$ делится на 2^k.

П.Кожевников

М2278. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп (возможно, одну) по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?

И.Богданов

М2279. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

Ф.Ивлев

М2280. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \text{ и } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \ge 25/3$.

И.Богданов

М2281. На координатной плоскости нарисованы n парабол, являющихся графиками квадратных трехчленов; никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более $2(n-1)$ углов (т.е. точек пересечения пары парабол).

Р.Карасев

М2282. а) Найдите все натуральные c, для которых существуют различные натуральные числа a и b такие, что ab делится на $a + c$ и на $b + c$.

б) Докажите, что для каждого натурального c множество пар чисел (a, b) из пункта а) конечно.

в) Пусть $n \ge 3$. Докажите, что для любых натуральных c и k существуют попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, большие k, такие, что произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ делится на каждое из чисел $a_1 + c, a_2 + c, \ldots$ $\ldots, a_n + c$.

В.Сендеров

М2283. Набор домино состоит из $n \ge 4$ доминошек. Каждый квадратик помечен числом из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем каждым числом помечено ровно два квадратика. По правилам игры две доминошки можно приставить друг к другу квадратиками, если эти квадратики помечены числами, отличающимися на 1 или на $n - 1$. Докажите, что по таким правилам можно выложить все доминошки в одну замкнутую цепь.

Д.Фон-Дер-Флаасс

М2284. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с натуральными членами последовательность $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, … содержит лишь конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

А.Голованов

М2285*. Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой – выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Для каждого i = 1, 2, …, n в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (считаем, что $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают все основание.

И.Пак

Ф2283. Камень брошен со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с высокой башни. Найдите время t, через которое скорость камня станет перпендикулярна начальной. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.

Д.Александров

Ф2284. Маленький массивный шарик закреплен на конце легкого жесткого стержня длиной R, другой конец которого прикреплен к неподвижному шарниру. Трение в шарнире отсутствует. Шарик со стержнем движутся по инерции так, что траектория движения шарика – это окружность, лежащая в вертикальной плоскости. На прохождение нижней половины окружности шарик затрачивает 49% времени оборота, а на прохождение верхней половины окружности – 51%. Чему равен период обращения?

С.Варламов

Ф2285. Барон Мюнхгаузен верхом на пушке завис неподвижно относительно Солнца где-то между Марсом и Юпитером. Используя законы Кеплера, помогите барону определить, в каком направлении ему необходимо выстрелить, чтобы период обращения ядра вокруг Солнца был: а) минимален; б) максимален. Чему равны эти периоды, если расстояние r_0 от барона до Солнца в $\alpha = 4$ раза больше радиуса орбиты Земли ($r_0 = \alpha R_З$, $R_З = 1$ а.е. $= 150$ млн км), а начальная скорость ядра v_0 в $\beta = 2$ раза меньше скорости Земли ($v_0 = v_З/\beta$, $v_З = 30$ км/с). Считайте ядро и Солнце точками, взаимодействующими по закону всемирного тяготения. Ядро на Солнце не падает. Влияние планет на движение ядра не учитывать.

Д.Александров

Ф2286. Деревянная линейка длиной L = 40 см, с постоянным поперечным сечением вдоль всей длины, падает, сохраняя положение, при котором ее длинная сторона остается вертикальной. Начальная скорость линейки равна нулю, до момента удара о жесткую горизонтальную поверхность линейка успевает пролететь в воздухе расстояние d = 5 см. Скорость распространения звука в дереве $v = 3{,}6$ км/с. Во сколько раз вес линейки во время удара больше силы тяжести?

Определения. Вес тела это сумма всех сил негравитационного происхождения, с которыми это тело действует на другие тела. Сила тяжести тела это сумма всех сил гравитационного происхождения, с которыми другие тела действуют на это тело.

С.Варламов

Ф2287. При подведении количества теплоты Q = = 600 Дж к смеси гелия и азота при постоянном объеме смесь нагревается на Δt_1 = 15 К, а если то же количество теплоты подвести к тому же количеству той же смеси при постоянном давлении, температура смеси повысится на Δt_2 = 10 К. Найдите отношение числа молекул азота к числу молекул гелия в смеси.

Д.Александров

Ф2288. Муха-Цокотуха, научившаяся летать по эквипотенциальным поверхностям (в электростатических полях), пролетает через уединенный плоский конденсатор на расстоянии $799d/1600$ от одной из его круглых пластин, где d – расстояние между пластинами, много меньшее их радиусов R. Заряды на пластинах равны $+Q$ и $-Q$. На какое максимальное расстояние r от конденсатора может удалиться Муха-Цокотуха при дальнейшем движении?

В.Плис

Ф2289. Кольцо радиусом R однородно заряжено зарядом Q. Бусинка с тем же по знаку зарядом q может свободно скользить по тонкой спице, совпадающей с диаметром кольца. Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Масса бусинки m. Кольцо закреплено.

В.Плис

Ф2290. В электрической цепи, изображенной на рисунке 1, все элементы можно считать идеальными. В некоторый момент после замыкания ключа тепловые мощности, выделяющиеся на резисторах сопротивлениями R и $2R$, равны 9 Вт и 2 Вт соответственно. С какой скоростью в этот момент растет энергия конденсатора?

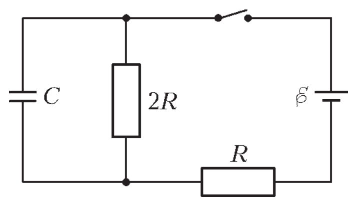


Рис. 1

Д.Александров

Ф2291. В схеме, показанной на рисунке 2, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что величина тока через резистор сопротивлением R непосредственно перед размыканием ключа и сразу

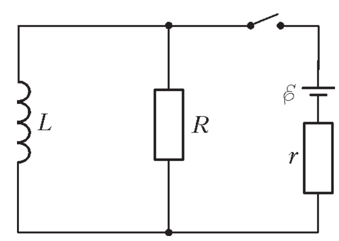


Рис. 2

после размыкания ключа одна и та же. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

А.Шеронов

Ф2292. Оптическая система, состоящая из расположенных на общей оптической оси на расстоянии $l = 10$ см друг от друга собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $|F_2| = 5$ см, создает изображение предмета, расположенного перпендикулярно оптической оси на некотором расстоянии перед собирающей линзой. Во сколько раз изменится размер изображения, если линзы поменять местами?

Д.Александров

Решения задач М2261–М2268, Ф2268–Ф2274

М2261. *Решите в целых числах уравнение*

$$\frac{10}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}.$$

Ответ: (1, 2, 3), (2, −2, 4).

Преобразуем данное равенство к виду $\frac{10-7x}{7} = \frac{z}{yz+1}$. Теперь в левой и правой частях – несократимые дроби, так как $\text{НОД}(10-7x, 7) = \text{НОД}(10, 7) = 1$ и $\text{НОД}(z, yz+1) = \text{НОД}(z, 1) = 1$. Значит, равенство дробей возможно только в том случае, когда их числители и знаменатели соответственно равны либо противоположны.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} 10 - 7x = z, \\ 7 = yz + 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 10 - z = 7x, \\ yz = 6. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем возможные значения z: ±1, ±2, ±3, ±6. Из всех вариантов только при $z = 3$ число $10 - z$ делится на 7. Отсюда $z = 3$, $y = 6/z = 2$, $x = (10-z)/7 = 1$.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} 10 - 7x = -z, \\ -7 = yz + 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 10 + z = 7x, \\ yz = -8. \end{cases}$$

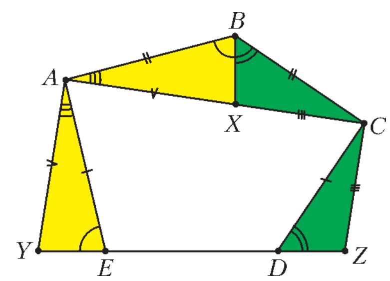
Из второго уравнения получаем возможные значения z: ±1, ±2, ±4, ±8. Из всех вариантов только при $z = 4$ число $10 + z$ делится на 7. Отсюда $z = 4$, $y = (-8)/z = -2$, $x = (10+z)/7 = 2$.

В.Сендеров

М2262. *В выпуклом пятиугольнике ABCDE известно: $\angle A = \angle C = 90°$, $AB = AE$, $CB = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь этого пятиугольника.*

Ответ: $1/2$.

Поскольку сумма углов пятиугольника равна $540°$, то $\angle B + \angle E + \angle D = 360°$. Следовательно, на отрезке AC найдется такая точка X, что углы ABX и CBX дополняют до $180°$ углы E и D соответственно (см. рисунок). Повернем треугольник ABX вокруг вершины A на $90°$ так, чтобы точка B перешла в точку E. Пусть при таком повороте точка X перейдет в точку Y, лежащую на прямой DE и такую, что $AY \perp AX$. Аналогично повернем треугольник CBX вокруг вершины C на $90°$ так, что треугольник CBX перейдет в треугольник CDZ. Тогда $YACZ$ – прямоугольная трапеция, в которой высота AC равна 1 и сумма оснований $AY + CZ = AX + CX = AC = 1$. Площадь исходного пятиугольника равна площади трапеции и равна $1/2$.



Кроме приведенного решения, существуют много других. Задача решается несложным вычислением с использованием теоремы косинусов $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, где $a = AB = AE$, $b = CB = CD$, $\alpha = \angle ABC$. Другое изящное геометрическое решение вытекает из следующего факта. Если M – середина DE, то треугольник ACM – прямоугольный и равнобедренный ($AM = CM$); причем если треугольники AEM, CDM и ABC отразить относительно сторон AM, CM, AC соответственно, то они покроют треугольник ACM без наложений. Доказать этот факт можно, рассматривая композицию поворотов на $90°$ вокруг точек A и C.

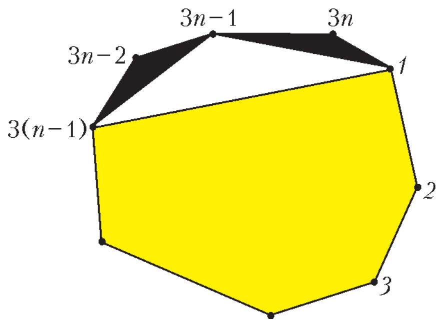
Ю.Блинков

М2263. *Выпуклый 999-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. После этого k треугольников окрасили в черный цвет, а оставшиеся l – в белый цвет так, что треугольники, граничащие по стороне, окрашены в разные цвета. Какое наибольшее значение может принимать выражение k − l?*

Ответ: 333.

Положим $N = 999 = 3n$. Каждая сторона треугольника из разбиения является либо стороной многоугольника, либо одной из проведенных диагоналей. При этом каждая проведенная диагональ является стороной ровно одного черного треугольника и ровно одного белого, а каждая из N сторон N-угольника является стороной ровно одного треугольника (черного либо белого). Таким образом, общее число сторон черных треугольников отличается от общего числа сторон белых треугольников не более чем на N: $3k - 3l \le N$, откуда $k - l \le n = 333$.

Пример разбиения $3n$-угольника, для которого $k - l = n$, можно построить индукцией по n. База индукции: $n = 1$ – один черный треугольник. Чтобы сделать индукционный переход, предположим, что нужный пример для $3(n-1)$-угольника существует. От данного $3n$-угольника отрежем три треугольника –



два черных и один белый (см. рисунок), оставшийся $3(n-1)$-угольник разобьем согласно предположению индукции. Полученный пример, очевидно, удовлетворяет всем условиям (при переходе от $n-1$ к n величина $k-l$ увеличилась на 1).

Замечание. Если в данной задаче 999-угольник заменить на N-угольник, то при $N = 3n + 2$ максимальное значение $k-l$ равно n (оценка $k-l \le n$ получается так же, как в приведенном решении, а пример строится индукцией по n). Если же $N = 3n + 1$, то ответ равен $n - 1$. В этом случае оценка $k-l \le n$ улучшается на 1, так как равенство $k - l = n$ противоречит равенству $k + l = 3n - 1$ (общее число треугольников в разбиении равно $N - 2$).

Упомянем следующую известную родственную задачу. *Все грани многогранника – треугольники, причем все грани можно окрасить в черный и белый цвета так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета. Требуется доказать, что количества черных и белых граней равны.*

Здесь подсчет двумя способами всех ребер многогранника сразу приводит к нужному равенству. В нашей задаче М2263 «дефект» $k-l$ может быть ненулевым из-за того, что некоторые треугольники разбиения выходят на границу многоугольника.

П.Кожевников

М2264. *2500 королей расставлены в клетках доски 100×100 так, что никакие два короля не бьют друг друга и в каждом ряду (в столбце или строке) находится ровно 25 королей. Найдите количество таких расстановок.*

Ответ: 2.

Рассмотрим некоторую расстановку, удовлетворяющую условию задачи. Разобьем доску на блоки 2×2. В каждом блоке не более одного короля (иначе два короля из одного блока бьют друг друга); следовательно, в каждом блоке должен стоять ровно один король. Припишем каждому блоку букву T или B,[1] если король расположен в верхней или нижней половине блока соответственно. Аналогично, припишем каждому блоку букву L или R,[2] если король расположен в левой или правой половине блока соответственно. Таким образом, мы определили *T-блоки*, *B-блоки*, *L-блоки* и *R-блоки*. Назовем блок *TL-блоком,* если он одновременно является T-блоком и L-блоком. Аналогичным образом определим *TR-блоки*, *BL-блоки* и *BR-блоки* (рис.1).

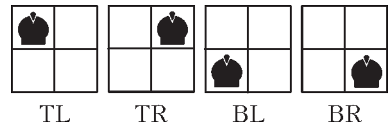


Рис. 1

Если мы знаем про каждый блок, какого он типа, то расстановка королей однозначно определена; поэтому далее мы говорим о доске 50×50, разбитой на блоки. Нумеруем блоки парами (i, j), где i – номер строки (строки нумеруем сверху вниз), а j – номер столбца (столбцы нумеруем слева направо), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 50\}$.

Верны следующие утверждения.

1) Если (i, j) – B-блок, то $(i+1, j)$ – также B-блок (иначе короли в этих соседних блоках будут бить друг друга). Аналогично: если (i, j) – T-блок, то $(i-1, j)$ – T-блок; если (i, j) – L-блок, то $(i, j-1)$ – L-блок; если (i, j) – R-блок, то $(i, j+1)$ – R-блок.

2) В каждом столбце ровно 25 L-блоков и 25 R-блоков, а в каждом ряду ровно 25 T-блоков и 25 B-блоков. В частности, общее количество L-блоков (как и R-блоков, T-блоков, или B-блоков) равно $25\cdot50 = 1250$.

Пусть $(1, j)$ – B-блок. Из 1) следует, что все блоки j-го столбца – B-блоки; таким образом, имеем целый *B-столбец* из B-блоков. Согласно 2), у нас 25 B-блоков в первой строке, и, значит, имеется 25 B-столбцов. Эти 25 B-столбцов содержат 1250 B-блоков, значит, все остальные блоки в оставшихся столбцах обязаны быть T-блоками, и мы получаем 25 *T-столбцов*. Аналогично показываем, что имеется ровно 25 *L-строк* и ровно 25 *R-строк*.

Теперь рассмотрим некоторую пару соседних столбцов, один из которых является T-столбцом, а другой – B-столбцом; пусть это столбцы с номерами j и $j + 1$.

Случай 1. Предположим, что j-й столбец – это T-столбец, а $(j+1)$-й столбец – это B-столбец. Пусть i-я строка является самой верхней среди всех L-строк; тогда $(i, j+1)$ – это BL-блок. Поэтому $(i+1, j)$ не может быть TR-блоком (рис.2), поэтому $(i+1, j)$ – TL-блок, следовательно, $(i+1)$-я строка является

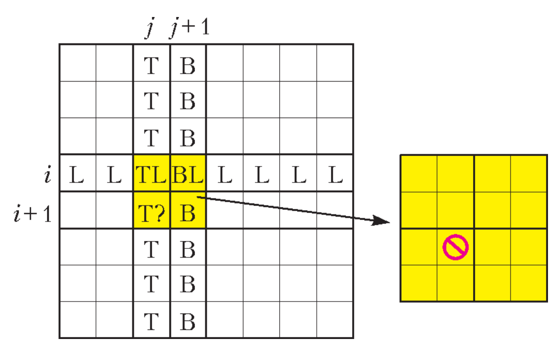


Рис. 2

L-строкой. Продолжая рассуждать таким же образом, доказываем, что все строки с i-й по 50-ю являются L-строками. Так как у нас должно быть ровно 25 L-строк, получаем, что строки с 1-й по 25-ю – R-строки, а строки с 26-й по 50-ю – L-строки.

Теперь рассмотрим соседние строки, одна из которых является R-строкой, а другая – L-строкой (т.е. 25-ю и

[1] Сокращение от слов top и bottom.
[2] Сокращение от слов left и right.

TR	TR	TR	TR	BR	BR	BR	BR
TR	TR	TR	TR	BR	BR	BR	BR
TR	TR	TR	TR	BR	BR	BR	BR
TR	TR	TR	TR	BR	BR	BR	BR
TL	TL	TL	TL	BL	BL	BL	BL
TL	TL	TL	TL	BL	BL	BL	BL
TL	TL	TL	TL	BL	BL	BL	BL
TL	TL	TL	TL	BL	BL	BL	BL

Рис. 3

BL	BL	BL	BL	TL	TL	TL	TL
BL	BL	BL	BL	TL	TL	TL	TL
BL	BL	BL	BL	TL	TL	TL	TL
BL	BL	BL	BL	TL	TL	TL	TL
BR	BR	BR	BR	TR	TR	TR	TR
BR	BR	BR	BR	TR	TR	TR	TR
BR	BR	BR	BR	TR	TR	TR	TR
BR	BR	BR	BR	TR	TR	TR	TR

Рис. 4

26-ю строки). Заменяя в предыдущем рассуждении строки на столбцы и наоборот, получаем, что столбцы с 1-го по 25-й – Т-столбцы, а столбцы с 26-го по 50-й – В-столбцы. Таким образом, получаем единственно возможное расположение блоков (рис.3). Легко видеть, что соответствующее расположение королей удовлетворяет условию.

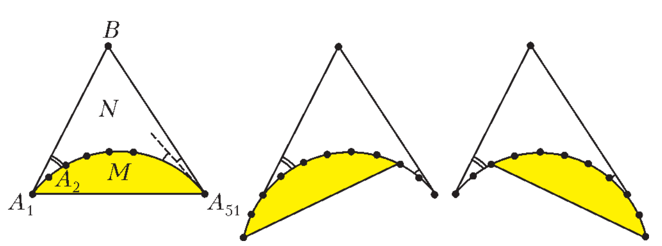
Случай 2. Пусть теперь j-й столбец – В-столбец, а $(j+1)$-й – Т-столбец. Повторяя рассуждения для случая 1, мы обнаружим, что строки с 1-й по 25-ю это L-строки (а остальные строки – R-строки), столбцы с 1-го по 25-й – В-столбцы (а остальные столбцы – Т-столбцы), таким образом, мы находим еще одно расположение блоков и соответствующее расположения королей, удовлетворяющее условию (рис.4).

С.Берлов, И.Богданов

М2265. *Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?*

Ответ: существуют.

Предъявим пример таких многоугольников. Пусть многоугольник $M = A_1A_2\ldots A_{51}$ таков, что $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{50}A_{51}$ и $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = \ldots = \angle A_{49}A_{50}A_{51} = 179°$ (как на рисунке слева). Построим треугольник $A_1A_{51}B$, содержащий M и такой, что $\angle A_{50}A_{51}B = 1°$, а $\angle BA_1A_2 > 1°$. Мы утверждаем, что M и $N = BA_1A_2\ldots A_{51}$ – пара требуемых многоугольников. M и N в объединении дают треугольник. Чтобы получить $(2k+1)$-угольник (при $2 \le k \le 49$), повернем M так, чтобы отрезок A_kA_{k+1} перешел в отрезок A_1A_2. Чтобы получить $2k$-угольник (при $2 \le k \le 50$), повернем M так, чтобы отрезок A_1A_2 перешел в отрезок A_kA_{k+1}. После такого поворота одна из сторон многоугольника M перейдет в отрезок, являющийся продолжением отрезка BA_{51}, поэтому в самом деле в объединении получается многоугольник с $2k$ вершинами. На рисунке показано, как получаются 3-, 7- и 6-угольники.



С.Берлов, И.Богданов, С.Волчёнков

М2266. *Докажите, что существуют бесконечно много натуральных чисел n таких, что $2^{2^n+1}+1$ делится на n, а $2^n + 1$ не делится на n.*

Все числа, которые фигурируют в решении, являются натуральными. Положим $b_k = 2^{3^k}+1$. Нам понадобятся следующие факты.

1) *Если нечетное a делится на b, то x^a+1 делится на x^b+1.*

Для доказательства достаточно воспользоваться разложением $y^k+1 = (y+1)(y^{k-1} - y^{k-2} + \ldots - y + 1)$, где $a = kb$ и $y = x^b$.

2) Малая теорема Ферма: *если p – простое число, то $x^p \equiv x \pmod p$.*

3) b_k *делится на* 3^{k+1}.

Это можно доказать индукцией по k. При $k = 1$ утверждение верно. Сделаем индукционный переход:

$$b_{k+1} = 2^{3^{k+1}}+1 = \left(2^{3^k}+1\right)\left(\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k}+1\right) = b_k\left(\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k}+1\right).$$

Теперь достаточно заметить, что второй сомножитель делится на 3.

4) *Найдется простое число p_k такое, что b_{k+1} делится на p_k, а b_k – нет.*

Продолжим работать с равенством $b_{k+1} = b_k\left(\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k}+1\right)$. Имеем $\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k}+1 = (b_k-1)^2 - b_k + 2 \equiv 3 \pmod{b_k}$, значит, НОД$\left(b_k, \left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k}+1\right) = 3$, а поскольку число $\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k}+1 = 2^{3^k}\left(2^{3^k}-1\right)+1$ нечетно и больше 3, оно имеет искомый простой делитель $p_k > 3$.

Теперь мы готовы предъявить бесконечную серию чисел n, удовлетворяющих условию, положив $n = 3^k p_k$ (k – произвольное натуральное число).

Из малой теоремы Ферма следует, что $2^n+1 = \left(2^{3^k}\right)^{p_k}+1 \equiv 2^{3^k}+1 = b_k \pmod{p_k}$, значит, 2^n+1 не делится на p_k и, следовательно, не делится на n.

С другой стороны, так как 2^n+1 делится на $2^{3^k}+1$, которое в свою очередь делится на 3^{k+1}, то (см. факт 1) $2^{2^n+1}+1$ делится на $2^{3^{k+1}}+1 = b_{k+1}$. Так как b_{k+1} делится и на 3^k, и на p_k, то $2^{2^n+1}+1$ делится на n.

Замечание. Задача имеет много разных решений. Приведем еще красивое рассуждение, предложенное Душаном Джукичем.

Достаточно привести хотя бы одно подходящее n (скажем, $n = 57$ подходит) и доказать, что если нечетное число n удовлетворяет условию задачи, то и $N = 2^n+1 > n$ – тоже. Из того что N не делится на n, несложно вывести, что 2^N+1 не делится на $N = 2^n+1$

(вообще, для нечетных a и b справедливо $НОД\left(2^a+1, 2^b+1\right)=2^{НОД(a,\,b)}+1$). С другой стороны, число $M=2^N+1=2^{2^n+1}+1$ делится на n, и поэтому $2^M+1=2^{2^N+1}+1$ делится на $2^n+1=N$.

Читатель может проследить, как идеи, возникающие в решениях задачи М2266, перекликаются со статьей «Степени n и n-е степени», опубликованной в «Кванте» №1 за 2012 год.

В.Сендеров

М2267. *В институте Социальной справедливости им. П.П.Шарикова работают 15 научных сотрудников. Каждый из них изначально получает от 1 до 9 долларов в месяц. Каждый месяц директор института повышает зарплату 11 сотрудникам на 1 доллар в месяц по своему усмотрению. За какое минимальное число месяцев он гарантированно может сделать все зарплаты равными?*

Ответ: 39.

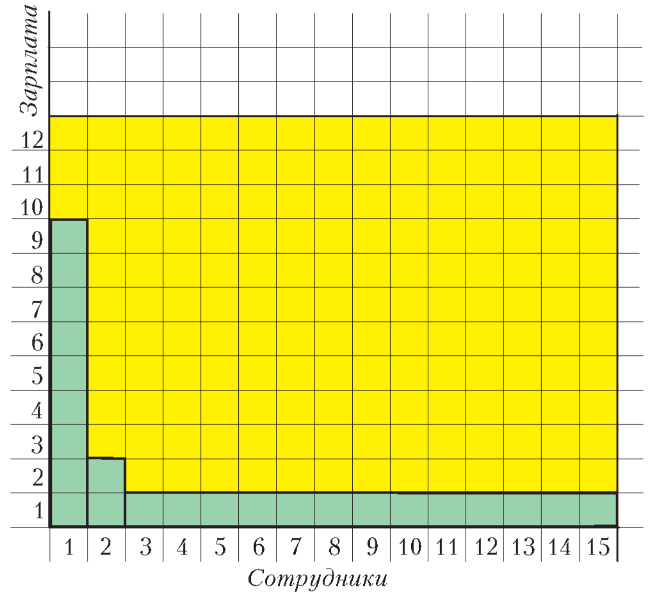
Начнем с наблюдения. От увеличения или уменьшения зарплаты всем сотрудникам на одно и то же число для нашей задачи ничего не меняется.[1] Поэтому операцию подъема зарплаты на 1 доллар 11 людям заменим на операцию понижения зарплаты оставшимся 4 сотрудникам. Доходы можно отчитывать в обратном направлении (заменить зарплату в k долларов на $10-k$). Поэтому задача сводится к случаю операции подъема зарплаты 4 сотрудникам на 1 доллар.

Изображать условие задачи удобно следующим образом: имеется таблица из 15 клетчатых столбиков, в каждом столбике столько клеток, какова зарплата соответствующего сотрудника. За один ход мы добавляем в 4 разных столбика 4 клетки. Требуется уравнять количества клеток во всех столбиках.

Для начала поймем, что вообще уравнять столбики за несколько ходов всегда возможно (независимо от начального положения).[2] Действительно, за 4 операции можно в один из столбиков добавить 2 клетки, а во все остальные – по одной клетке. Это действие равносильно добавлению одной клетки в заданный столбик. Но такими операциями, очевидно, можно добиться требуемого.

Пусть изначально в столбиках 9, 2, 1, 1, ..., 1 клеток (см. рисунок). Покажем, что меньше чем за 39 ходов уравнять количество клеток невозможно. Пусть после уравнивания в каждом столбике стало по r клеток. Суммарное начальное количество клеток (24) кратно 4, значит, и конечное ($15r$) – тоже. Тогда $r\,\vdots\,4$, поэтому $r\ge 12$. Значит, общее число добавленных клеток за все ходы не меньше чем $15\cdot 12-24$, а число ходов $k\ge\dfrac{15\cdot 12-24}{4}=39$.

Остается наиболее трудная часть решения: нужно доказать, что при любой начальной ситуации для уравнивания хватит не более 39 операций.



Будем строить процедуру выравнивания в два этапа.

1) Вначале осуществим выравнивание, «забыв», что нужно добавлять 4 клетки в разные столбики (т.е. за ход добавляем 4 клетки, при этом, возможно в некоторые столбики добавляется более одной клетки).

Это сделать несложно за $k\le 39$ ходов.[3] Пусть M – наибольшее начальное число клеток в столбике, а S – начальное суммарное число клеток (ясно, что $M\le 9$, и $S\ge M+14$). Добавим клеток так, чтобы в каждом столбце их стало $M+t$. Добавление возможно, если $R=15(M+t)-S$ делится на 4, поэтому берем $t\in\{0, 1, 2, 3\}$ так, чтобы $t\equiv 15M-S\pmod 4$. При этом число ходов

$$k=\frac{R}{4}\le\frac{15(M+3)-(M+14)}{4}=$$
$$=\frac{14M+31}{4}\le\frac{14\cdot 9+31}{4}<40.$$

Если число ходов до выравнивания оказалось слишком мало (не больше 11), то несложно добавить 15 ходов так, чтобы снова во всех столбиках клеток было поровну.[4] Таким образом, можно считать, что мы выполнили выравнивание за k ходов, где $11\le k\le 39$.

2) Теперь исправим процедуру выравнивания. Покажем, что можно изменить процедуру из k ходов так, чтобы она стала разрешенной (т.е. за каждый ход 4 клетки добавлялись в разные столбики).

Скажем, что столбик участвовал в ходе m раз, если за этот ход в него добавлено m клеток. Ход записываем в виде четверки чисел (порядок в четверке не важен). Каждому ходу присвоим *параметр* n – количество пар равных чисел в соответствующей четверке. Например, $n(1, 2, 1, 1)=3$, $n(1, 1, 2, 2)=2$, $n(1, 1, 1, 1)=6$, $n(1, 2, 3, 4)=0$. Среди всех процедур выравнивания за k ходов рассмотрим процедуру с минимальной суммой P параметров всех k ходов. В следующих

[1] И с точки зрения социальной справедливости тоже(!).

[2] Это известная задача, ставшая уже классикой. Читатель может доказать этот факт в общей форме – для n столбиков и добавления за ход m клеток, где НОД(m,n) = 1.

[3] Можно сравнить следующую оценку с обоснованием предъявленного выше примера.

[4] Это соображение будет важно далее, в утверждении 2.

двух утверждениях доказывается, что $P = 0$, т.е. мы получили требуемое.

Утверждение 1. *Если $P > 0$, то найдется столбик, который участвовал в каждом ходе.*

Доказательство. Пусть один из столбиков участвовал в каком-то ходе трижды или четырежды, скажем, был сделан ход $(1, 1, 1, a)$. Покажем, что в таком случае столбик 1 участвовал во всех ходах. Если это не так, то одним из ходов был (b, c, d, e), где b, c, d, e не равны 1. Тогда замена этой пары ходов на пару $(1, 1, b, a)$, $(1, c, d, e)$ уменьшает P (так как $n(1, 1, 1, a) + n(b, c, d, e) > n(1, 1, b, a) + n(1, c, d, e)$. Противоречие.

Предположим теперь, что ни один столбик не участвовал ни в одном ходе более чем 2 раза.

Пусть один из столбиков (скажем, столбик 1) участвовал в некотором ходе дважды, а два других столбика – по одному разу, скажем, был сделан ход $(1, 1, 2, 3)$. Снова покажем, что столбик 1 участвовал во всех ходах. Пусть есть ход, в котором столбик 1 не участвовал. Если в нем один из столбиков 2, 3 участвовал дважды, скажем, был сделан ход $(2, 2, a, b)$, тогда $n(1, 1, 2, 3) + n(2, 2, a, b) > n(1, 2, 2, 3) + n(1, 2, a, b)$, а это противоречие. Если же в нем столбики 2 и 3 участвовали не более одного раза, скажем, был сделан ход (a, b, c, d), где a отлично от 1, 2, 3, то $n(1, 1, 2, 3) + n(a, b, c, d) > n(a, 1, 2, 3) + n(1, b, c, d)$ – противоречие.

Наконец, пусть два столбика участвовали в некотором ходе по два раза, скажем, был сделан ход $(1, 1, 2, 2)$. Пусть есть ход, в котором столбик 1 не участвовал, скажем, ход (a, b, c, d), где $a \neq 1, 2$, тогда $n(1, 1, 2, 2) + n(a, b, c, d) > n(a, 1, 2, 2) + n(1, b, c, d)$, и снова получаем противоречие.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Если число ходов $k \geq 11$, то $P = 0$.*

Доказательство. Согласно утверждению 1, если $P > 0$, то один из столбиков (скажем, столбик 1) участвовал во всех ходах и после k ходов в нем будет не меньше $k + 1$ клеток. В остальных столбиках за k ходов в сумме прибавилось не более $3k$ клеток, но для уравнивания со столбиком 1 должно было прибавиться не меньше $(k + 1 - 9)14$ клеток. Однако $(k + 1 - 9)14 > 3k$ при $k \geq 11$. Противоречие.

А.Белов, А.Ковальджи

М2268*. *В треугольнике ABC окружность проходит через B, C и касается вписанной окружности в точке A'. Аналогично определяются точки B', C'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.*

Пусть A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности γ со сторонами BC, CA и AB соответственно (рис.1). Прямые A_1A', B_1B' и C_1C' будут пересекаться в одной точке. Этот факт является частным случаем задачи М2244 («Квант» №5–6 за 2011 г.).[1]

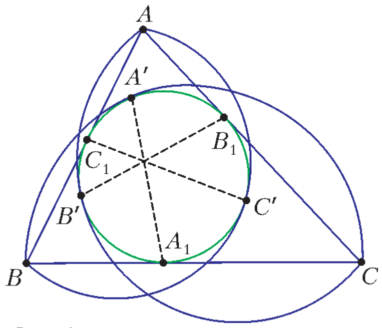


Рис. 1

Теперь для решения задачи достаточно доказать следующий общий факт. Для произвольных точек A', B', C' окружности γ прямые A_1A', B_1B' и C_1C' пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда прямые AA', BB', CC' также пересекаются в одной точке либо параллельны (рис.2).

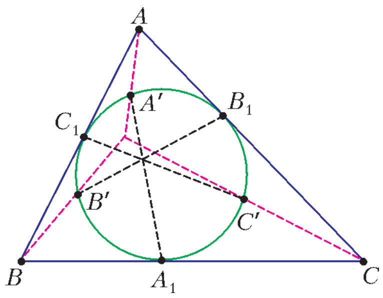


Рис. 2

По теореме Чевы в форме синусов прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке либо параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle C_1AA'}{\sin \angle B_1AA'} \cdot \frac{\sin \angle A_1BB'}{\sin \angle C_1BB'} \cdot \frac{\sin \angle B_1CC'}{\sin \angle A_1CC'} = 1. \qquad (1)$$

Аналогично, условие пересечения в одной точке либо параллельности прямых A_1A', B_1B' и C_1C' эквивалентно соотношению

$$\frac{\sin \angle C_1A_1A'}{\sin \angle B_1A_1A'} \cdot \frac{\sin \angle A_1B_1B'}{\sin \angle C_1B_1B'} \cdot \frac{\sin \angle B_1C_1C'}{\sin \angle A_1C_1C'} = 1. \qquad (2)$$

Из теоремы синусов для треугольников AB_1A' и AC_1A' $\dfrac{\sin \angle C_1AA'}{\sin \angle B_1AA'} = \dfrac{C_1A' \sin \angle AC_1A'}{B_1A' \sin \angle AB_1A'}$. По теореме о касательной и хорде $\angle AC_1A' = \angle C_1A_1A'$ и $\angle AB_1A' = \angle B_1A_1A'$. Кроме того, $\dfrac{C_1A'}{\sin \angle C_1A_1A'} = \dfrac{B_1A'}{\sin \angle B_1A_1A'} = 2r$, где r – радиус окружности γ. Отсюда

$$\frac{C_1A' \sin \angle AC_1A'}{B_1A' \sin \angle AB_1A'} = \frac{C_1A' \sin \angle C_1A_1A'}{B_1A' \sin \angle B_1A_1A'} = \frac{\sin^2 \angle C_1A_1A'}{\sin^2 \angle B_1A_1A'}.$$

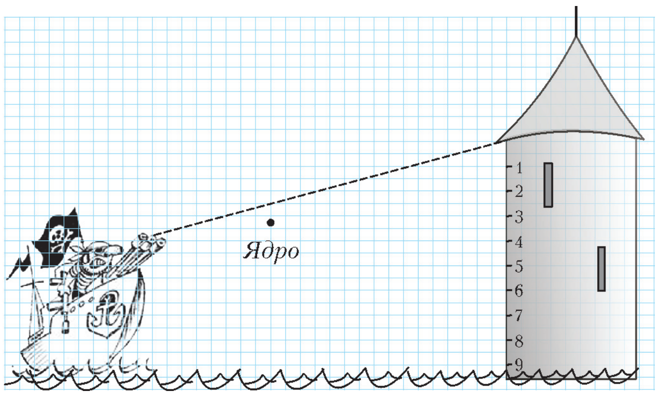
Таким образом, $\dfrac{\sin \angle C_1AA'}{\sin \angle B_1AA'} = \dfrac{\sin^2 \angle C_1A_1A'}{\sin^2 \angle C_1A_1A'}$. Аналогично получаем соотношения $\dfrac{\sin \angle A_1BB'}{\sin \angle C_1BB'} = \dfrac{\sin^2 \angle A_1B_1B'}{\sin^2 \angle C_1B_1B'}$ и $\dfrac{\sin \angle A_1CC'}{\sin \angle B_1CC'} = \dfrac{\sin^2 \angle A_1C_1C'}{\sin^2 \angle B_1C_1C'}$. Перемножив получившиеся три равенства, видим, что соотношения (1) и (2) равносильны.

Замечание. Факт из формулировки этой задачи также заметил Ф.Ивлев. Он же предложил другую замечательную задачу (международная олимпиада Romanian Masters of Mathematics-2012, см., например, http://rmm.lbi.ro) об окружностях, касающихся вписанной окружности и проходящих через две вершины треугольника.

П.Кожевников, Д.Швецов

[1] Здесь три из окружностей, о которых идет речь в условии задачи М2244, вырождаются в прямые. Решение задачи (см. «Квант» №2 за 2012 г.) при этом сохраняется без изменений.

Ф2268. *Пираты стреляют из пушки по защитникам береговой крепости. Рисунок показывает взаимное расположение корабля, пушки, ядра и стены крепости в некий момент времени. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите место на стене, в которое попадет ядро. Пунктирная линия показывает ось симметрии закрепленной пушки.*



Из рисунка видно, что к данному моменту времени по горизонтали ядро пролетело всего $1/3$ расстояния до стены. При этом по вертикали оно отклонилось от пунктирной линии на 1,5 клетки. Следовательно, пролетев все расстояние по горизонтали до стены, ядро отклонится от пунктирной линии на расстояние в 9 раз большее. Таким образом, ядро ударится в стену вблизи отметки 6,5.

Дж.Сильвер

Ф2269. *В цилиндрической жестяной банке находится невязкий жидкий напиток, основное содержимое которого – вода. Банке, заполненной напитком, предоставили возможность скатиться без проскальзывания по наклонной плоскости с нулевой начальной скоростью и замерили время скатывания t_0. Затем в банке сделали два маленьких отверстия, через них половину напитка слили (или выпили), отверстия заклеили скотчем и теперь уже полупустую банку снова отпустили без начальной скорости с того же места на той же наклонной плоскости. На прохождение того же маршрута полупустая банка затратила время $t = 1,2\,t_0$. Какое время потребуется на прохождение того же маршрута при тех же начальных условиях для совсем пустой банки?*

Жидкость в банке имеет очень малую вязкость, поэтому при скатывании банки по наклонной плоскости жидкость внутри сосуда не «катится», а скользит по стенкам цилиндрической банки и в целом движется поступательно. Конечно, в неполной банке имеют место колебания жидкости вблизи равновесного положения, которые делают ускорение оси банки непостоянным, но этим эффектом мы пренебрежем.

При скатывании банки проскальзывания нет, и работа силы тяжести превращается в кинетическую энергию воды (напитка) и самой банки. Кинетическая энергия воды пропорциональна массе воды M и в нижней точке наклонной поверхности пропорциональна величине $(L/t)^2$, где L – длина наклонной плоскости, t – время скатывания. Кинетическая энергия банки пропорциональна той же величине $(L/t)^2$ и массе банки m, умноженной на неизвестный коэффициент $\alpha = \left(1 + I/\left(mR^2\right)\right)$, где I – это момент инерции банки относительно ее оси симметрии. Если предположить, что вся масса банки равномерно распределена только по ее цилиндрическим стенкам, то $\alpha = 2$. Если же считать, что стенки банки невесомы, а масса равномерно распределена по торцам корпуса банки, то $\alpha = 1,5$. У реальной банки коэффициент α находится в диапазоне $1,5 < \alpha < 2$.

Запишем условие изменения кинетической энергии для разных ситуаций. Если банка полная, то

$$(M + m)gh = (M + m\alpha)\frac{(2L/t_0)^2}{2},$$

если банка наполовину пуста, то

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)gh = \left(\frac{M}{2} + m\alpha\right)\frac{(2L/1,02t_0)^2}{2},$$

если же банка совсем пустая, то

$$mgh = m\alpha\frac{(2L/t)^2}{2}.$$

Нужно найти значение времени t. Приняв крайние значения коэффициента α: $\alpha = 1,5$ и $\alpha = 2$ и решив соответствующие системы уравнений, можно указать, в каком диапазоне находится величина t. Обозначим $m/M = \beta$. Система уравнений для значения $\alpha = 1,5$ имеет вид

$$t_0^2 = \frac{1 + 1,5\beta}{1 + \beta}\frac{2L^2}{gh},$$

$$(1,02)^2 t_0^2 = \frac{(1/2) + 1,5\beta}{(1/2) + \beta}\frac{2L^2}{gh}.$$

Отсюда находим

$$\beta \approx 0,11731, \text{ и } t \approx 1,19t_0.$$

Соответствующая система уравнений для значения $\alpha = 2$ дает

$$\beta \approx 0,048643, \text{ и } t \approx 1,38t_0.$$

Таким образом, время скатывания пустой банки может находиться в интервале

$$1,19t_0 < t < 1,38t_0.$$

Б.Анкин

Ф2270. *Школьник Вася узнал, что энергия всегда сохраняется и что работа может превращаться в тепло. Он налил в стакан воду при комнатной температуре и начал ее интенсивно размешивать чайной ложкой. Частота движений ложки была около 5 Гц. После 5 минут работы Вася решил измерить, на сколько поднялась температура воды. Какой должна быть чувствительность термометра, чтобы зафиксировать это изменение температуры? Размеры стакана и ложки выберите сами.*

Стандартные размеры стакана и чайной ложки таковы: объем стакана $V \sim 0{,}2$ л, его внутренний диаметр $D \sim 6$ см, площадь поперечного (наибольшего) сечения ложки $S \sim 10$ см^2. При периодическом движении ложки в воде с частотой f ($f = 5$ Гц) ее скорость имеет порядок величины $v \sim \pi f D$, и ложка испытывает со стороны воды силу сопротивления, пропорциональную площади поперечного сечения ложки S, плотности воды ρ и квадрату скорости движения ложки относительно жидкости v^2. Следовательно, мощность сил, с которыми Вася действует на ложку, имеет порядок $N \sim S\rho(\pi D f)^3$. За время t ($t = 300$ с) в жидкости (в воде) выделится количество теплоты, имеющее порядок величины Nt. Теплоемкостью стенок стакана можно пренебречь в сравнении с теплоемкостью воды, поэтому теплоемкость стакана с водой можно оценить величиной $c\rho V$, где c ($c = 4200$ Дж/(К·кг)) – удельная теплоемкость воды. Отсюда получаем формулу для оценки величины изменения температуры воды ΔT в стакане после интенсивного ее размешивания чайной ложкой:

$$S\rho(\pi D f)^3 t \sim c\rho V \Delta T .$$

В рассматриваемой ситуации изменение температуры весьма мало:

$$\Delta T \sim \frac{S(\pi D f)^3 t}{cV} \approx 10^{-3}\ \text{К} .$$

Для регистрации этого изменения температуры датчик должен иметь чувствительность такого же порядка, т.е. 10^{-3} К. А термометры с такими свойствами в быту не используются.

В.Асев

Ф2271. *Резиновая оболочка воздушного шарика имеет массу $m = 3$ г. Оболочку заполняют горючим газом – метаном CH_4, который имеет комнатную температуру. При каком диаметре шарик с метаном начнет «всплывать» в воздухе? Разницей давлений внутри шарика и снаружи можно пренебречь.*

Поскольку в условии предлагается пренебречь отличием давления газа внутри шарика и снаружи, то при одной и той же (комнатной) температуре $T \approx 300$ К снаружи и внутри шарик с метаном начнет всплывать в воздухе при условии равенства нулю суммы всех сил, действующих на него со стороны Земли и окружающего воздуха. Это будет иметь место при равенстве средней плотности шарика с метаном и плотности воздуха. Плотность газа с молярной массой M при атмосферном давлении $p \approx 10^5$ Па и температуре $T \approx 300$ К находится из закона Менделеева–Клапейрона: $\rho = Mp/(RT)$. Объем шарика V выражается через его диаметр D формулой $V = \pi D^3/6$. Среднее значение молярной массы воздуха $M_в = 0{,}029$ кг/моль, а значение молярной массы метана $M_м = 0{,}016$ кг/моль. Отсюда следует

$$\frac{pM_м}{RT} + \frac{m}{\pi D^3/6} = \frac{pM_в}{RT}, \text{ или}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{6mRT}{\pi p(M_в - M_м)}} \approx 23\ \text{см} .$$

С.Метанин

Ф2272. *В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, все батарейки одинаковые, идеальные и имеют ЭДС $\mathscr{E} = 1$ В каждая. Все резисторы тоже одинаковые и имеют сопротивление $R = 10$ Ом каждый. Найдите токи, текущие через каждую батарейку и через каждый резистор (нумерацию элементов введите сами).*

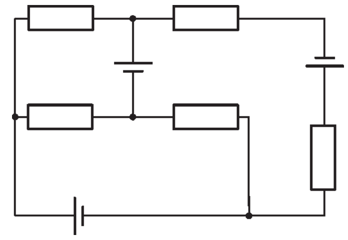


Рис. 1

Раскроем «секрет» придумывания таких схем. Выделим в заданной схеме красным цветом замкнутую цепь – сначала автором рисуется именно она (рис.2). Эта цепь представляет собой 3 (число может быть больше и часто достигает значения, совпадающего с календарным годом, что могло составить 2012 в этом году) последовательно включенные друг за другом пары: батарейка + резистор. Понятно, что при таком включении на каждом резисторе, входящем в состав пары, падает напряжение, равное как раз ЭДС одной батарейки. Поэтому потенциалы точек, отмеченных символом 1 в рамочке, равны друг другу, и потенциалы точек, отмеченных символом 2 в рамочке, тоже равны друг другу. Следующий шаг составления «хитрой» схемы такой: между точками, отмеченными одинаковыми символами, или имеющими одинаковые потенциалы, можно включать (вставлять) любые пассивные элементы радиотехнических цепей. К ним относятся резисторы с произвольными значениями сопротивлений, диоды, катушки индуктивности, конденсаторы, лампочки накаливания или газоразрядные лампочки и так далее – т.е. все, что не содержит внутренних источников питания. И поскольку потенциалы на выводах таких элементов одинаковы, ток по ним не течет (резисторы, лампочки и катушки) и не накапливается энергия (конденсаторы). После такого «разбора» задача решается «в уме».

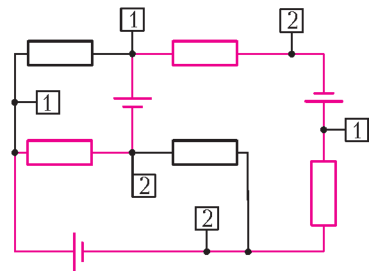


Рис. 2

Конечно, можно решить эту задачу и «честно». Для этого удобнее всего воспользоваться методом «узловых потенциалов», который неоднократно был описан в решениях задач «Задачника «Кванта».

Итак, через каждый элемент «красной» цепи течет ток $I = 3\mathscr{E}/(3R) = 0{,}1$ А, а через остальные элементы ток не течет.

С.Хемов

Ф2273. *В камере Вильсона зарегистрированы последствия столкновения α-частицы и покоившегося до удара протона. В однородном магнитном поле перпендикулярно вектору его индукции после удара частицы двигались по окружностям с радиусами R и $0{,}75R$.*

Каким был радиус R_0 траектории α-частицы до удара?

Из соображений размерности ответ должен выражаться через радиус R и безразмерный коэффициент $\beta = 0{,}75$. Еще, конечно, нужно учитывать свойства α-частицы и протона: их массы отличаются примерно в 4 раза, а электрические заряды – в 2 раза.

Пусть в исходной системе отсчета скорость α-частицы равна v, а индукция магнитного поля (перпендикулярная вектору скорости) равна B. Скорости частиц до удара и после удара связаны друг с другом двумя законами сохранения: импульса и энергии. Удобной системой отсчета для решения задач про упругие столкновения является такая система отсчета, где центр масс системы сталкивающихся частиц покоится, т.е. суммарный импульс частиц равен нулю, а их импульсы равны по величине и противоположны по направлению. Очевидно, что после столкновения их импульсы тоже будут одинаковы по величине. В исходной системе отсчета после столкновения с α-частицей величина скорости протона, покоившегося до удара, может находиться в диапазоне от 0 до максимально возможной величины, равной удвоенной скорости центра масс системы α-частица + протон. Это легко доказывается методом «двух шагов». Первый «шаг» – это пересадка в систему отсчета, в которой центр масс покоится. В этой системе отсчета у покоившегося до удара протона была скорость, равная $-v_{цм}$, а после лобового удара она равна $+v_{цм}$. Второй «шаг» – это обратная пересадка в исходную систему отсчета. Переносная скорость равна $+v_{цм}$ и относительная скорость тоже равна $+v_{цм}$, поэтому по отношению к исходной системе отсчета протон (и любая другая частица), покоившийся до удара, после абсолютно упругого лобового удара имеет скорость $+2v_{цм}$. Поскольку α-частица имеет массу в 4 раз больше, чем масса покоившегося протона, то, соответственно, максимальная по величине скорость протона после соударения будет равна $8v/5$, а у α-частицы скорость будет равна $3v/5$.

Радиус траектории движущейся в магнитном поле электрически заряженной частицы при взаимно перпендикулярном расположении векторов ее скорости и индукции магнитного поля определяется соотношением

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Поэтому после лобового удара рассматриваемых частиц получаются такие радиусы траекторий:

$$R_p = \frac{8mv}{5eB} \text{ и } R_\alpha = \frac{12mv}{10eB} = \frac{6mv}{5eB}.$$

Заметим, что нам повезло и одно из решений соответствует лобовому удару: $R_\alpha / R_p = 0{,}75$. Значит, больший радиус у протона и он равен $R = 8mv/(5eB)$. До удара радиус траектории α-частицы в магнитном поле был $R_0 = 4mv/(2eB)$. Отсюда следует ответ для одного из возможных решений:

$$R_0 = \frac{5R}{4}.$$

Понятно, что второе решение соответствует случаю, когда удар не был лобовым и радиус траектории у α-частицы после удара был больше, чем у протона. Это решение, естественно, гораздо более трудоемкое, так как после удара у частиц появляются составляющие импульсов, перпендикулярные первоначальному направлению движения α-частицы. Однако с помощью законов сохранения импульса и энергии можно получить ответ и в этом случае. Сделайте это самостоятельно.

Ч.Вильсон

Ф2274. *Для ионизации атома водорода, находящегося в основном состоянии, требуется энергия $E = 13{,}6$ эВ ≈ 10 эВ. Оцените энергию, которая нужна, чтобы полностью ионизировать один атом урана* $_{92}\mathrm{U}$.

Устройство многоэлектронных систем не объясняется в классической физике. Однако известно, что энергии ионизации для большинства нейтральных атомов находятся в достаточно узком диапазоне – от 3 эВ (для щелочных металлов) до 24 эВ (для атома гелия). Теория Бора позволяет рассчитать энергию ионизации только для атома водорода: $E_1 = 13{,}6$ эВ или для так называемых водородоподобных атомов: $E_k = k^2 \cdot E_1$, где k – заряд ядра в единицах заряда протона, и не в состоянии объяснить свойства даже такой «простой» системы, состоящей всего из трех частиц, как атом гелия.

На уроках физики и химии рассказывается о разрешенных уровнях энергии для электронов, входящих в состав атомов, говорится о наличии нескольких квантовых чисел, необходимых для описания разрешенных состояний электрона в атоме. Так, главное квантовое число n характеризует энергию связи электрона с ядром, или среднее расстояние от электрона до ядра, орбитальное квантовое число l характеризует абсолютную величину орбитального момента импульса электрона, а магнитное квантовое число m характеризует проекцию этого момента импульса на некоторое выбранное в пространстве направление, например на направление внешнего магнитного поля. Есть также спиновое квантовое число, характеризующее проекцию собственного момента количества движения электрона на направление внешнего магнитного поля. Оказывается, что ни в какой квантовой системе не могут существовать электроны, у которых были бы одинаковыми все четыре квантовых числа. Совокупность электронов в атоме с одним и тем же главным квантовым числом n называют электронной оболочкой. Оболочки обозначают буквами K, L, M, N, O, … Аналогично, электроны с одним и тем же значением орбитального квантового числа l образуют подоболочку. Подоболочки обозначают буквами s, p, d, f, g с указанием главного квантового числа – например, $1s$, $2s$, $2p$, $3d$ и т.д.

Для расчета энергии ионизации возбужденного водородоподобного атома с электроном, живущим на уровне энергии с главным квантовым числом n, применяется формула $E_{kn} = \left(k^2/n\right) \cdot E_1$.

При решении нашей задачи об оценке энергии, необходимой для полной ионизации атома урана, проведем оценку «снизу» и оценку «сверху». Для оценки «снизу» будем считать, что каждый удаляемый из состава атома электрон ведет себя как независимый, находящийся в поле точечного заряда, соответствующего заряду атома за вычетом заряда этого самого электрона. Тогда нужная энергия находится суммированием:

$$E_{\text{снизу}} = E_1 \cdot \sum_1^{92} k^2 = 13{,}6\ \text{эВ} \cdot 263810 \approx 3{,}6\ \text{МэВ}.$$

Для оценки «сверху» будем считать, что все оставшиеся около ядра атома электроны, живущие на оболочках с меньшими значениями чисел n_1 и l_1, частично экранируют заряд ядра атома от электронов, живущих на оболочках с бóльшими значениями чисел n_2 и l_2. И оценка будет еще точнее, если считать, что каждый электрон, живущий на некоторой подоболочке, взаимодействует с электронами, живущими на той же подоболочке, в соответствии с законом Кулона. При этом среднее расстояние между двумя электронами какой-либо подоболочки примерно в полтора раза больше расстояния между этими электронами и ядром атома. Девяносто два электрона атома урана распределены по оболочкам (главным квантовым числам n) и подоболочкам (орбитальным квантовым числам l) так, как показано на рисунке. Цветами отмечены заполненные уровни энергии атомов: красный – гелий, голубой – неон, розовый – аргон, синий – криптон, зеленый – ксенон, оранжевый – радон, желтый – уран. Каждый из перечисленных атомов содержит внутри себя структуру, соответствующую предыдущему атому в этом списке. Лишь у гелия нет предшественника. Полностью заполнены электронами только первые 4 оболочки атома урана. С учетом распределения электронов по подуровням оценка «сверху» для энергии ионизации атома урана будет такой:

l \ n	1	2	3	4	5	6	7
$0 = s$	2	2	2	2	2	2	2
$1 = p$	0	6	6	6	6	6	
$2 = d$	0	0	10	10	10	1	
$3 = f$	0	0	0	14	3	0	

$$E_{\text{сверху}} = E_1 \cdot \Big(92^2 + (92 - 2/3)^2 + 90^2 + \\ + (90 - 2/3)^2 + \ldots + (90 - 7 \cdot 2/3)^2 + \ldots + 82^2 + \\ + (82 - 2/3)^2 + \ldots + 2^2 + (2 - 2/3)^2\Big) \approx 4\ \text{МэВ}.$$

Расчет, естественно, проводился не вручную, а с использованием компьютера.

Понятно, что вклад в общую сумму той части энергии, которая необходима для удаления внешних электронов, гораздо меньше части энергии, необходимой для удаления электронов, находящихся ближе всего к ядру атома. Поэтому оценки «сверху» и «снизу» оказались все-таки близкими друг к другу.

У.Ранов

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Квадрат в конверте

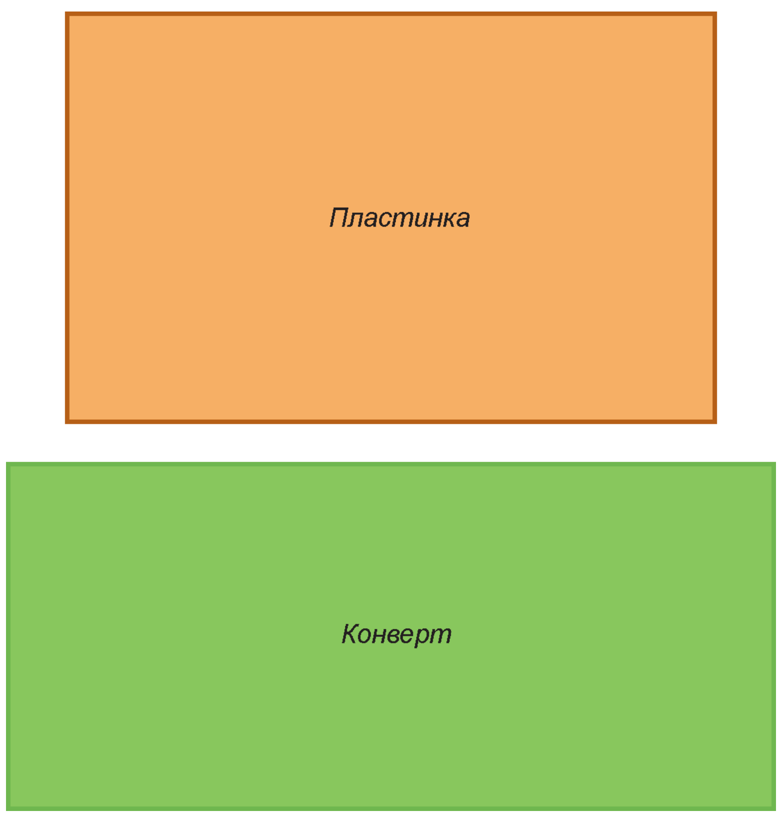
(Начало см. на 2-й странице обложки)

Пластинку лучше изготовить из тонкого и прочного пластика, но можно также использовать картон, фанеру или металл. Главное, чтобы она не гнулась от небольшого усилия. Конверт сделайте из неэластичной ткани или бумаги. Для квадратной пластинки со стороной a конверт должен иметь длину $a\sqrt{2}$ и ширину $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Но это – без учета толщины пластинки. Про нее тоже не стоит забывать: к размерам конвертика (длине и ширине) надо прибавить толщину пластинки.

Есть и более общий – прямоугольный – вариант этой головоломки. Размеры конверта для пластинки $a \times b$ предлагаем вычислить в качестве упражнения (квадратный случай служит подсказкой). Удобно в качестве пластинки взять пластиковую карту (например, кредитную). Обычно такие карты – прямоугольники $85{,}6 \times 53{,}98$ мм толщиной 0,76 мм. На картах скругляют углы, но сильно проще от этого головоломка не станет. Верхний прямоугольник на рисунке имеет размеры пластиковой карты, а нижний – подходящего конверта (без учета толщины).

Автор этой замечательной задачи Хироказу Ивасава получил за нее почетный приз зрительских симпатий на XXXII Съезде любителей головоломок, проходившем в августе 2012 года в Вашингтоне.

Е.Епифанов



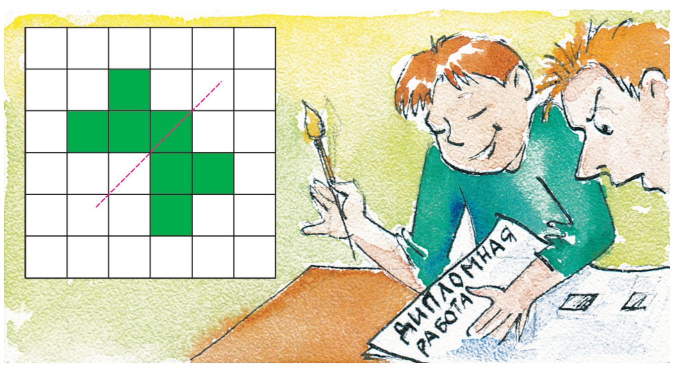
Задачи

1. Мартышка, Осел и Козел затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осел оказался в центре. А трио все нейдет на лад. Пересели еще раз. При этом оказалось, что каждый из трех «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел на третий раз?

И.Раскина

2. На клетчатом листе бумаги было закрашено несколько клеток так, что получившаяся фигура не имела осей симметрии. Ваня закрасил еще одну клетку. Могло ли у получившейся фигуры оказаться 4 оси симметрии? (Пример фигуры с одной осью симметрии приведен на рисунке, ось симметрии показана пунктиром.)

И.Ященко



3. Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто – мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей мультиков средний балл по математике меньше 4, у любителей футбола – тоже меньше 4. Может ли средний балл всего класса по математике быть больше 4? (Среднее нескольких чисел – это сумма этих чисел, деленная на их количество.)

А.Шаповалов

4. Равнобедренный треугольник с углом 120° сложен ровно из трех слоев бумаги. Треугольник развернули – и получился прямоугольник. Нарисуйте такой прямоугольник и покажите пунктиром линии сгиба.

Г.Мерзон

5. Верно ли, что в вершинах любого треугольника можно расставить положительные числа так, чтобы сумма чисел в концах каждой стороны треугольника равнялась длине этой стороны?

Фольклор

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов. Задачи предлагались на XXXV Турнире имени М.В.Ломоносова.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Мерседес за тремя дверями

С.ДОРИЧЕНКО

А началось все...

– Представляешь, кручу я это проклятое колесо, и вдруг выпадает сектор «приз»! – Билл с горящими глазами рассказывал своему старому другу Джону, как недавно побывал на игре «Колесо фортуны».

– Я, конечно, обрадовался. А ведущий подводит меня к трем дверям и говорит: «Не все так просто. За одной из дверей – мерседес. И он может стать твоим, Билл. Выбирай любую дверь». Я аж весь вспотел от напряжения. Ну, думаю, была не была, и показываю на ту, что справа. А он вдруг идет к центральной и распахивает ее. А там пусто. «Видишь ли, Билл, – продолжает он, – я решил тебе немного помочь. Я знаю, где спрятан мерседес. И, чтобы повысить твои шансы, открыл одну из дверей, за которой пусто». Да, думаю, спасибо, но мне-то что толку? А тут он и выдает: «А теперь, Билл, главное – я разрешаю тебе изменить выбор. Можешь указать на другую дверь. Если хочешь, конечно. Решай!» Тут меня прямо в дрожь бросило. Раньше-то у меня какие были шансы – один к трем, понятное дело. А теперь две двери остались – левая и правая. Значит, шансы уже один к двум. Обрадовался поначалу, а потом прикидываю – ну и какая тогда разница, какую дверь открывать? Шансы-то теперь одинаковые. Может, думаю, запутывает? И не стал выбор менять – открыл, как и хотел, правую дверь. И ничего не выиграл. А вот теперь мучаюсь – это просто мне не повезло или все-таки надо было левую дергать?

Ответ Джона

– Сдается мне, сплоховал ты, братец, – покачал головой Джон. – Шансы стали бы куда больше, измени ты свое решение.

– Как это, Джон? Ведь остались две двери, значит, шансы одинаковые.

– Так ведь ведущий всегда мог открыть из двух дверей одну, за которой пусто. Значит, про твою дверь он тебе ровным счетом ничего не сообщил. Там как была вероятность 1/3, так и осталась.

– Нет, это ерунда. Раз за открытой дверью ничего нет, то там сразу вероятность 0 получается. Значит, за двумя другими – по 1/2.

– Почему поровну-то? Ладно, давай не спеша разберемся. Возьмем те две двери, которые ты не выбрал. С какой вероятностью мерседес находится за ними?

– Это пока ничего не открывают? Да вроде как 2/3 получается.

– Правильно. А тут ведущий одну из этих дверей открывает, выбирая ту, за которой ничего нет. И он, понятно, всегда это может сделать. Значит, он просто

Впервые опубликовано в журнале «Квантик» №7 за 2012 год.

Иллюстрации В.Пяткина

тебе проясняет, что вот, мол, за этой дверью из тех двух нет мерседеса. Но вероятность, что за теми двумя дверями мерседес, — по-прежнему 2/3. И у тебя не появляется никакой информации про выбранную тобою дверь. Вся неопределенность — где именно мерседес, за теми двумя дверями или за той, что ты выбрал, — сохранилась!

— Это что же тогда получается? Раз эти 2/3 сидят по-прежнему в тех двух дверях, но за одной из них точно пусто, то эти 2/3 все целиком на другую дверь переходят?

— Ну да. А у твоей исходно выбранной двери вероятность 1/3 остается. — Джон победно откинулся на стуле и потянулся за коктейлем. А Билл задумался.

Вторая попытка

— Наверное, я уже давно должен был все понять, — сказал после долгого размышления Билл, — но я в этих вероятностях не силен, и что-то все-таки как-то мне не верится...

— Терпение, главное — терпение, — чуть слышно пробормотал Джон. Он начал потихоньку выходить из себя. — Хорошо, Билл, давай попробуем по-другому. Вот представь себе, будешь ты целый месяц ходить на эту игру, каждый раз совершенно случайно выбирать дверь и открывать ее. Сколько мерседесов ты выиграешь?

— Если без жульничества с их стороны, так за 30 дней примерно десяток наберется.

— Верно. Это и значит, что шансы твои будут 10 к 30, или 1 к 3, короче, вероятность — 1/3.

— Только я не пойму, к чему ты клонишь.

— Ну, вот представь себе, ходишь ты целый месяц на эту игру. Выбираешь случайно дверь. И как упертый, выбор не меняешь. Ведущий там суетится, что-то предлагает, а ты знай стоишь на своем. Сколько мерседесов ты выиграешь?

— Да вроде около десятка получится.

— А что же ты мне рассказывал, что когда ведущий одну дверь раскрыл, у тебя шансы повысились?

— Ну да, раз остались две закрытые двери, то шансы стали по 1/2 на каждую.

— Но тогда выходит, если ведущий каждый раз будет одну из дверей распахивать, ты за месяц уже 15 мерседесов заимеешь?

— Выходит, так, — неуверенно протянул Джон.

— Так ведь для тебя ничего же не изменилось! — Джон еле держал себя в руках. — Да пусть он хоть твою дверь распахнет, хоть все три: ты же свой выбор не меняешь!

— Эй, попридержи лошадей, приятель. Если он распахнет мою дверь, я сразу либо выиграю, либо проиграю.

— Да, Билл, да. В каждом конкретном случае ты либо проиграешь, либо выиграешь. Но если целый месяц будешь указывать случайную дверь и не станешь менять свой выбор, что бы там потом ни открывали, выиграешь ты примерно 10 мерседесов.

— Неужто правда?

— Тебе же и раньше фактически все три двери открывали, чтобы твой выбор проверить. А теперь что-то открывают чуть раньше: когда ты уже выбрал, но еще как бы не до конца. Но ты же выбор не меняешь. Можешь считать, что это они двери открывать начали, чтобы проверить, угадал ты или нет.

— Похоже, я и вправду за месяц тот же десяток наберу, хотя и чудно это как-то.

— Отлично! — Джон утер вспотевший лоб платком. — А теперь, Билл, напрягись и ответь: сколько мерседесов ты выиграешь, если каждый раз будешь менять свой выбор?

— Откуда же я знаю?

— О'кей, давай сделаем так. Представь себе, что мы с тобой ходим на эту чертову игру вместе. Выбираешь дверь каждый раз ты и выбор свой не меняешь. А вот я, наоборот, после предложения ведущего твой выбор каждый раз меняю — ну, мысленно как бы. Ты тогда наберешь 10 мерседесов за месяц, так?

— Да вроде так, Джон.

— А сколько наберу я?

— Ты? Это мысленно, значит?

— Да, мысленно, мысленно.

— А ты... Ну если я выиграл, ты уходишь ни с чем. А если мне не повезло, то мерседес, значит, за другой закрытой дверью. Эй, так он же тебе тогда достанется! Всего мерседесов 30, я выиграл 10. Значит, ты выиграешь... 20? Но это нечестно, Джон!

— А ты чего хотел? Настаивая на своем выборе, ты открываешь одну случайную дверь из трех — значит, свою треть мерседесов и получишь. А меняя выбор, ты как бы открываешь две оставшиеся двери: одну за тебя открывает ведущий, а вторую — ты сам. Вместо одной случайной двери — целых две. Чего ж тут удивляться, что шансы удвоились?

— Гениально, — воскликнул Билл и снова погрузился в размышления. Его озаренное догадкой лицо постепенно мрачнело. Джон с тревогой следил за Биллом. Наконец Билл нерешительно и как бы извиняясь выдал Джону следующее.

Последний довод

— Да, Джон, похоже ты прав. Ты очень понятно тут толковал, но все же я не вполне понял...

— Билл! — Джона почти хватил удар. — Ради бога, молчи! Я придумал, я тебе сейчас все предельно доходчиво объясню. Представь, что на этой игре 100 дверей.

— Ого, целых 100, это здорово. Только тогда никаких шансов.

— Да, Билл, 100 дверей. Только не «никаких шансов», а 1/100 — маловато, но все же кое-что. Так вот, Билл, после того как ты выбрал дверь, добрый и всезнающий ведущий открывает — сколько бы ты думал — 98 дверей, за которыми ничего нет! Да, Билл, распахивает все двери, кроме двух — той, что ты выбрал, и еще одной какой-то двери. И предлагает тебе поменять выбор, либо настаивать на своем. Что ты сделаешь?

— Что я сделаю, Джон? Так ведь если я поменяю выбор, то угадаю в тех случаях, когда мерседес был за теми 99 дверями, кроме той, что я выбрал сначала. А если не поменяю, то угадаю, только если мне сразу повезло. Но, конечно же, мерседес скорее за теми 99 дверями, чем за той одной, куда я случайно ткнул пальцем. Так что надо менять, это дураку ясно.

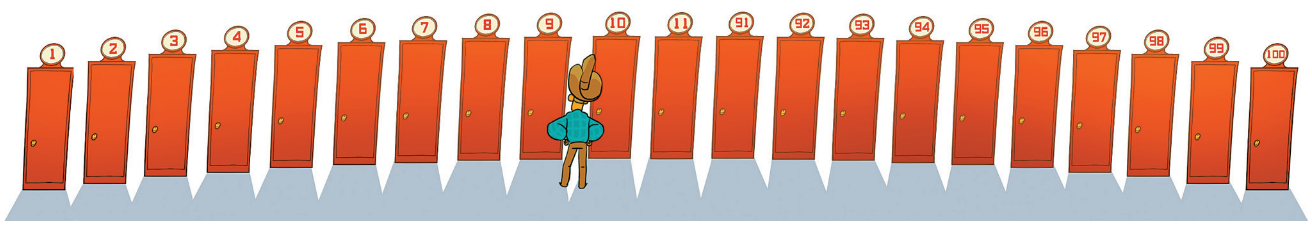
— Ну, кажется, ты хоть что-то понял. Только знаешь, хватит на сегодня вероятностей, мне пора. — И Джон поспешно распрощался с Биллом, пока тот снова не засомневался.

Новая загадка

Наутро Билл влетел к Джону и прямо с порога взахлеб стал рассказывать.

— Джон, тут такая история. У Тэда, который надзирателем работает, в тюрьме трое давнишних заключенных, так двоих решили освободить досрочно. А кого именно — пока им не говорят. Тэд-то знает, но сказать не имеет права. А один из заключенных — приятель Тэда — все его упрашивает: «Про меня не хочешь ответить — не надо, но назови мне хоть одного, кого освободят». Тэд уже почти согласился, а его приятель вдруг передумал: «Нет, стой! Сейчас у меня шансы освободиться 2/3, а как я узнаю про одного из тех ребят, что его выпускают, так мои шансы сразу до 1/2 упадут». Джон, а я понял, где этот парень ошибся!

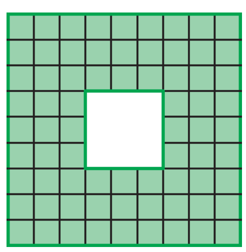
А вы поняли?



Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.ras.ru (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

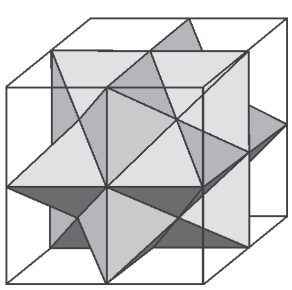


6. На рисунке изображена квадратная рамка толщиной три клетки. Разрежьте ее по сторонам клеток на восемь двенадцатиугольников одинаковой площади.

Г. Жуков

7. Паша написал в ряд N разных натуральных чисел, не превосходящих 1000. Затем он поделил второе число на первое, третье — на второе, четвертое — на третье, ..., последнее — на предпоследнее. Каждый раз в результате деления получалось одно и то же число. Найдите наибольшее возможное значение N.

П. Кожевников



8. На рисунке изображен кристалл, вписанный в куб единичного объема. Найдите объем кристалла. (С какой бы стороны куба ни посмотреть на кристалл, он устроен одинаково. Вершины кристалла, лежащие на ребрах куба, делят их пополам.)

Н. Авилов

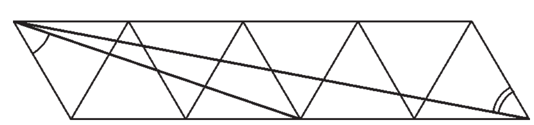
9. Почти сотню раз сражались Шерлок Холмс и профессор Мориарти на обрыве у Рейхенбахского водопада. Более чем в 27% поединков победил Холмс, сбросив профессора в воду (правда, тот всегда выплывал). Мориарти одержал в полтора раза меньше побед (при этом в воду падал Холмс). Остальные встречи закончились вничью (падали оба).

За каждой победой Мориарти следовала победа Холмса, а после каждой победы Холмса происходили хотя бы две ничьи.

С каким результатом закончилась третья по счету схватка?

И. Акулич

10. Восемь правильных треугольников расположены, как показано на рисунке.



Найдите сумму двух отмеченных углов.

Е. Бакаев

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

«Потенция» и «живая сила»

А.СТАСЕНКО

Но глуповцы тоже были себе на уме. Энергии действия они с большою находчивостью противопоставили энергию бездействия.

М.Е.Салтыков-Щедрин. История одного города

Да разве есть такая энергия – энергия бездействия? А вот и есть! Она называется потенциальной энергией (от англ. potential – возможный). Сжатая пружина, высокогорный снежный пласт, пластины заряженного конденсатора, социальное расслоение ... – вот примеры источников потенциальной энергии, которая может перейти в кинетическую, или, как говорили в средние века, в «живую силу». Так, пружина толкает груз, снежная лавина сметает все на своем пути, разряжающийся конденсатор нагревает электрическое сопротивление, русский бунт – «бессмысленный и беспощадный», как его называет А.С.Пушкин в повести «Капитанская дочка», – уравнивает в бедности оставшихся в живых.

Физике, которая стремится к фундаментальной простоте, сильно повезло: важнейшие законы взаимодействия тел и зарядов описываются удивительно простыми зависимостями силы и энергии от расстояния r между этими (точечными) телами и зарядами.

Вспомним закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона: сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния, а потенциал, т.е. потенциальная энергия в расчете на единицу массы или заряда, обратно пропорционален первой степени расстояния:

$$F \sim \pm\frac{1}{r^2}, \quad \varphi \sim \pm\frac{1}{r}.$$

Здесь знак «плюс» говорит об отталкивании одноименных зарядов, а знак «минус» – о притяжении разноименных. Это – в случае электростатики. Гравитирующие же тела всегда притягиваются, и для них в приведенных соотношениях справедлив только знак «минус».

А вот для растянутой (или сжатой) пружины сила пропорциональна первой степени деформации r и обязательно со знаком «минус» – ведь это возвращающая (!) сила, а потенциал пропорционален квадрату этой деформации:

$$F \sim -r^1, \quad \varphi \sim r^2.$$

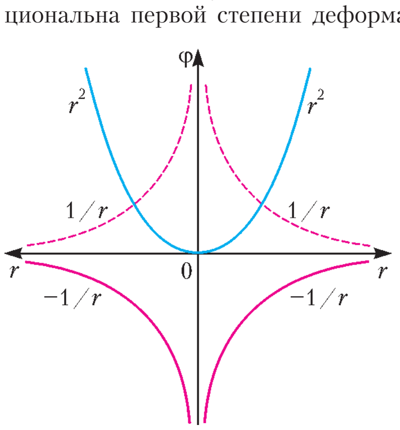


Рис. 1. Потенциалы гравитационного и электростатического взаимодействий и потенциал деформации

Эти простейшие потенциалы (повторим – потенциальные энергии в расчете на единицу массы или заряда) изображены на рисунке 1. Рассматривая этот рисунок, можно понять, откуда у физиков возник образ «потенциальной ямы». Приведенные кривые (сплошные линии) похожи на сечение стенок сосуда, по которым «шарик» – точечная масса или заряд противоположного знака – стремится соскользнуть на дно. Аналогично, случай расталкивания одноименных зарядов соответствует соскальзыванию с «горки» (пунктирные линии). Обратим внимание на то, что координата r слева от нуля вовсе не отрицательна – на рисунке показано сечение тела вращения, имеющего ось φ.

Можно наглядно реализовать «потенциальную яму» при помощи мокрого куска мыла, поместив его первоначально у верхнего края ванны и отпустив. Если бы не потери энергии на трение и сопротивление воздуха, колебания куска мыла продолжались бы вечно.

Но есть и более сложные зависимости – например, потенциальная энергия (потенциал φ) взаимодействия пары молекул (рис.2). Понятно, что значение расстояния r_m между центрами этих молекул, соответствующее минимуму потенциальной энергии, описывает конденсат. При бóльших расстояниях ($r > r_m$) происходит взаимное притяжение молекул газа, здесь $\varphi \sim -\frac{1}{r^6}$. При меньших расстояниях ($r < r_m$), когда газ становится жидкостью или твердым телом, попытка сблизить эти молекулы приводит к резкому противодействию: им снова предлагают вернуться в потенциальную яму. Чтобы подчеркнуть очень резкую зависимость от r на этой ветви кривой, предложено взять $\varphi \sim \frac{1}{r^{12}}$. В целом эта кривая зависимости φ от r представляет так называемый потенциал Леннард-Джонса.

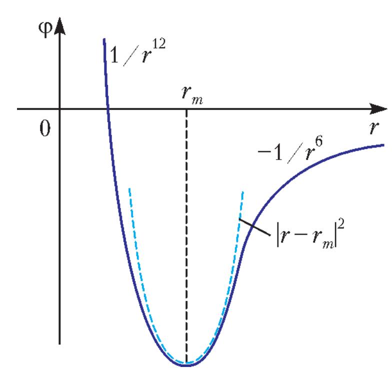


Рис. 2. Потенциал взаимодействия двух молекул

А что это за пунктирная кривая на рисунке 2? Это – парабола, напоминающая потенциальную энергию деформированной пружины (см. рис.1). Дело в том, что физикам очень нравятся простые колебания – гармонические, происходящие внутри параболической ямы. И отклонение реальной потенциальной ямы от параболической физики назвали мерой ангармоничности. Но любые колебания – это переход одной энергии (например, потенциальной) в другую (кинетическую) при сохранении их суммы. Это и есть закон сохранения механической энергии (если пренебречь ее потерями).

И опять вспоминается А.С.Пушкин (поэма «Руслан и Людмила»):

…И в той долине два ключа:
Один течет волной *живою*,
По камням весело журча,
Тот льется *мертвою* водою…

Точнее было бы сказать, что второй («тот») ключ напоминает водохранилище, питающее электростанцию. Однако, оба ключа помогли храброму Руслану – конечно, не без помощи колдуна. Похоже, тот был физиком…

Удивительный угол падения

А.СТАСЕНКО

Как известно, вампиры становятся к зеркалу под углом Брюстера.

Однажды на лекции в МФТИ

В ЭТОЙ ШУТКЕ ЛЕКТОР ИСПОЛЬЗОВАЛ НАРОДНОЕ ПОВЕрие о том, как выявить вампира среди живых людей: он не отражается в зеркале.

Оказывается, подобное явление вполне возможно в физике – электромагнитная волна, в частности оптического диапазона, т.е. свет, при определенных условиях не отражается от гладкой поверхности, целиком проходя внутрь тела. Что же это за условия?

Рассмотрим все по порядку. Уж если волна электромагнитная, то в ней должны быть электрическое и магнитное поля. Далее, известно, что векторы индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$ в плоской бегущей волне перпендикулярны друг другу и направлению ее распространения – так называемому волновому вектору $\vec{k}$ (рис.1). Последний факт означает, что волна поперечно поляризована, причем возможны два независимых направления поляризации. Например, рисунок 1 показывает, что в

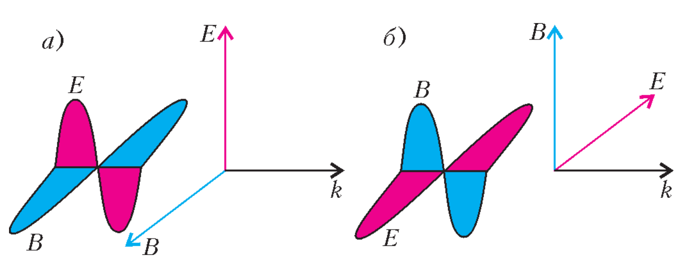


Рис.1. Бегущая электромагнитная волна может быть поляризована в одном из двух направлений

этих направлениях поляризации вектор $\vec{E}$ может колебаться в вертикальной или в горизонтальной плоскости. И, оказывается, волны с разными направлениями поляризации неодинаково взаимодействуют с поверхностью твердого тела.

Обратимся теперь к рисунку 2. В случае *а*) изображено магнитное поле бесконечного проводника с током силой I. Линии вектора магнитной индукции – окружности, сам вектор поля касателен к ним и имеет единственную (азимутальную) составляющую B_φ, одинаковую по модулю на одном и том же расстоянии $r_\perp$ от провода. Каждый отличник знает, что для бесконечного провода

$$B_\varphi \sim \frac{I}{r_\perp}.$$

Выделим теперь небольшой участок провода длиной l с тем же током I, т.е. рассмотрим элемент тока $\vec{Il}$ (рис.2,*б*). Понятно, что линии поля $\vec{B}$ будут по-прежнему окружностями. Но также понятно, что теперь модуль B_φ будет неодинаков на расстояниях $r_\perp$ и r. Можно сказать, что при фиксированном $r_\perp$ он должен уменьшаться с уменьшением угла θ, а на продолжении отрезка l (при $\theta = 0$) обращаться в ноль (легко видеть, что $\frac{r_\perp}{r} = \sin\theta$). И вполне разумно предположить, что магнитное поле будет по-прежнему пропорционально силе тока I, но теперь также и длине отрезка l. В результате этих наводящих рассуждений мы придем к выводу, что для элемента тока

$$B_\varphi \sim \frac{Il}{r^2}\sin\theta.$$

К этому же выводу несколько раньше нас пришли и несколько знаменитых физиков, отчего полученное выражение называется законом Био–Савара–Лапласа.

На рисунке 2,*в* приведено сопоставление со статическим электрическим полем $\vec{E}$ точечного заряда q. Напряженность этого поля тоже прямо пропорциональна порождающему его агенту – заряду, обратно пропорциональна квадрату расстояния от него, но направлена по радиусу:

$$E \sim \frac{q}{r^2}.$$

На самом деле, все, что нам нужно из этих рассуждений для понимания оптики вампиров, – это то, что элемент тока $\vec{Il}$ не создает магнитного поля в направлении тока.

Но может ли существовать такой «кусочек тока»? Конечно, в статических условиях – нет. Поэтому свяжем его с колебательным движением заряда q со скоростью v:

$$Il = qv.$$

Действительно, по крайней мере, слева и справа размерности одинаковы:

$$\text{А}\cdot\text{м} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}\cdot\text{м} = \text{Кл}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}!$$

Только такое движение и может породить электромагнитную волну. Но может ли она распространяться вдоль направлений, соответствующих углам $\theta = 0$ или $\theta = \pi$? Предположим, как древние греки (доказательство от противного), что может. Но тогда вектор $\vec{E}$ должен быть перпендикулярен этим направлениям (см. рис.1,*а*). А как он будет направлен? В плоскости рисунка 2,*б*? Или перпендикулярно ей? Или под каким-то углом? Получается, что единственная для него

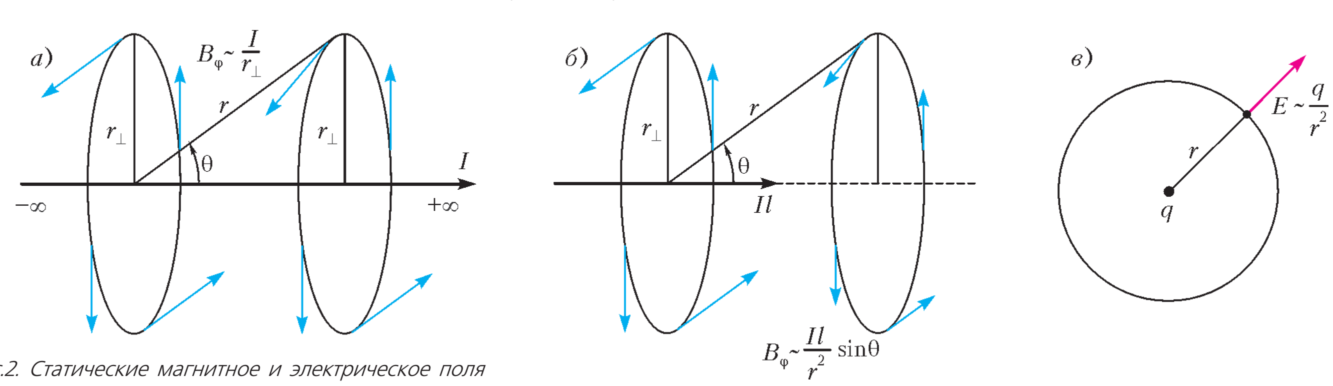


Рис.2. Статические магнитное и электрическое поля

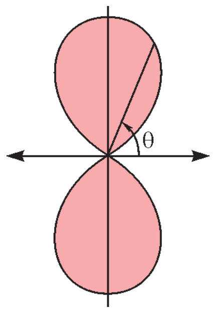


Рис.3. Колеблющийся диполь (антенна) не излучает в направлении колебаний

возможность – быть равным нулю. Это рассуждение еще раз подтверждает, что антенна или колеблющийся диполь не излучают энергию вдоль движения зарядов (рис.3).

Теперь мы легко поймем, что свет вокруг нас поляризован, во всяком случае частично. Действительно, взглянем на небо в направлении, перпендикулярном лучам солнца (рис.4). В этих лучах в равных количествах присутствуют электромагнитные колебания с обоими направлениями поляризации, электрический вектор которых как параллелен ($\vec{E}_{\parallel}$), так и перпендикулярен ($\vec{E}_{\perp}$) вертикальной плоскости. Взаимодействуя со сгустками молекул, солнечный свет превращает их в излучающие диполи (как говорится, происходит рассеяние на флуктуациях плотности молекул). Но в выбранном нами направлении эти маленькие «антенны», возбужденные полем $\vec{E}_{\parallel}$, не посылают к нам энергию, а те «антенны», которые возбуждены вектором $\vec{E}_{\perp}$, – посылают. Поэтому, как легко убедиться, именно в этом направлении небо имеет самый синий цвет. Но, конечно, это результат многократного рассеяния, и наблюдаемый нами свет поляризован лишь частично.

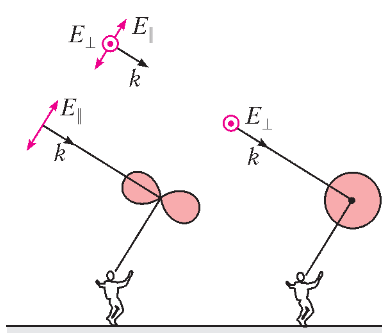


Рис.4. Солнечный свет содержит оба направления поляризации

А что получится, если заранее поляризованный свет $\vec{E}_{\parallel}$ (в вертикальной плоскости) падает на гладкую поверхность тела с коэффициентом преломления n (рис.5)? Тут ясно виден случай, когда угол между преломленным лучом $\vec{k}_n$ (линия AC) и отраженным лучом $\vec{k}'$ (линия AD) может оказаться равным $90°$. Это значит, что диполи вещества, возбужденные падающим светом, ничего не излучают в направлении AD. Энергия уйдет полностью в преломленный луч.

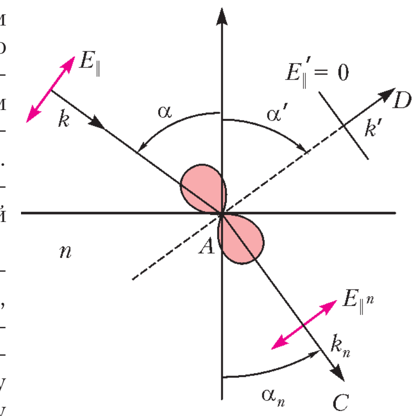


Рис.5. Волна, поляризованная в плоскости падения, не отражается, если угол падения удовлетворяет условию Брюстера

Легко получить значение угла падения α, при котором произойдет это интересное явление. Согласно закону преломления (закону Снеллиуса), направления падающего и преломленного лучей связаны соотношением $\sin\alpha_n = \dfrac{\sin\alpha}{n}$, а направление отраженного луча определяется законом отражения $\alpha' = \alpha$ (угол падения равен углу отражения). А кроме того, как мы уже поняли, угол между отраженным и преломленным лучами должен быть прямым: $\angle CAD = 90°$, так что $\alpha_n = \pi - \alpha' - \pi/2 = \pi/2 - \alpha$. Подставляя последнее соотношение в закон преломления, получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{n},$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = n.$$

Это простое выражение, называемое законом Брюстера (в честь открывшего этот закон английского физика Дейвида Брюстера), позволяет, в частности, измерять коэффициент преломления даже непрозрачных веществ. Направьте луч, поляризованный в плоскости падения, на поверхность тела и, изменяя угол его падения, заметьте, когда исчезнет отраженный луч. Этот угол и оказывается углом Брюстера.

Очень интересный угол падения!

Пределы точности «точных» наук

А.СТАСЕНКО

Я не могу объяснить, почему Природа ведет себя так, а не иначе... Так что я надеюсь, что вы сможете принять природу такой, как она есть – «абсурдной».

Р.Фейнман

НАВЕРНОЕ, НОВОСЕЛЫ УДИВИЛИСЬ БЫ, УЗНАВ, ЧТО чем осторожнее они несут рояль, тем меньше шансов попасть в дверь. А ведь физика утверждает именно это.

Начнем с того, что существует так называемый принцип неопределенности (или соотношение неопределенностей), который говорит, что невозможно одновременно точно узнать импульс тела и его положение в пространстве. Физики указывают и меру этой неопределенности. Если неопределенность в измерении импульса $p_x = mv_x$ обозначить через Δp_x, а неопределенность координаты x – через Δx, то их произведение оказывается тесно связанным с одной из фундаментальных констант – с постоянной Планка $\hbar$:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (1)$$

Эта постоянная – очень малая величина, она приблизительно равна 10^{-34} Дж·с, но все-таки не нулю! Поэтому, если предположить, что рояль имеет массу m ($m \sim 100$ кг), из соотношения (1) получим неопределенность его координаты: $\Delta x \sim \dfrac{\hbar}{m\Delta v_x}$. И если кто-то заявит, что скорость перемещения рояля известна абсолютно точно, т.е. $\Delta v_x \to 0$, то отсюда следует $\Delta x \to \infty$. Иными словами, вообще неизвестно, где находится рояль.

Подчеркнем, что это соотношение неопределенностей не связано с точностью каких-либо измерительных приборов, а является фундаментальным свойством материи: природа запретила нам знать, что находится в прямоугольнике площадью порядка $\hbar$, нарисованном в плоскости с осями координат p_x и x (рис.1).

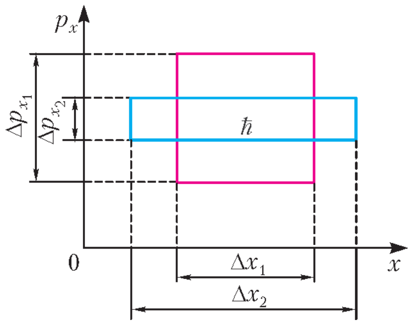


Рис.1. Иллюстрация принципа неопределенности на плоскости импульс–координата. Оба прямоугольника имеют площадь порядка $\hbar \sim \Delta p_{x_1}\Delta x_1 = \Delta p_{x_2}\Delta x_2$

Напомним, что через постоянную Планка выражается энергия кванта излучения $\hbar\omega$, где ω – его круговая (циклическая) частота. Конечно, не случайно эту фундаментальную константу великие физики «не замечали» до XX века: она появилась только с развитием теории равновесного теплового излучения – значит, нам уже не обойтись без понятия температуры T.

И тут вспоминается другой великий физик – Больцман. С его именем связана еще одна фундаментальная константа – постоянная Больцмана k, с помощью которой можно выразить среднюю энергию хаотического теплового движения любого тела вдоль одной из координат, например вдоль той же оси x:

$$\frac{m\langle v_x\rangle^2}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Эта константа тоже невелика: $k = 1{,}4\cdot 10^{-23}$ Дж/К .

Оказывается, любое тело, находящееся в равновесии с окружающей средой, не может пребывать в покое: его центр масс хаотически мечется во всех направлениях, так что средний по времени квадрат скорости равен

$$\langle v^2\rangle = \langle v_x\rangle^2 + \langle v_y\rangle^2 + \langle v_z\rangle^2 = \frac{3kT}{m}.$$

Значит, и центр масс рояля, строго говоря, не находится в покое; его «тепловая» скорость будет порядка

$$v = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \sim 10^{-11} \text{ м/с}$$

(здесь мы приняли T = 300 К).

Конечно, такое хаотическое метание рояля незаметно в нашем макромире. Но стоит перейти в микромир и рассмотреть, например, молекулу кислорода, масса которой равна приблизительно тридцати двум массам протона: $m_\text{к} = 32m_p = 32\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг , как скорость ее хаотического движения получим равной сотням метров в секунду (подставьте значение $m_\text{к}$ в предыдущую формулу). И именно в мире атомов «заиграет» в полную силу принцип неопределенности: если помножить размер атома, в объеме которого находится электрон, на скорость электрона (найденную, например, из условия, что центростремительное ускорение электрону сообщает сила кулоновского притяжения к ядру атома) и на массу электрона, то как раз получим величину порядка $\hbar$. Этот результат и привел к заключению, что никаких «орбит» (линий с нулевой толщиной) электрона в атоме быть не может.

Кстати о «микромире». Этот термин был введен для описания поведения атомов и молекул в те времена, когда приставка «микро» (10^{-6}) приписывалась чему-то предельно малому. Но, как оказалось, размеры микрочастиц скорее соответствуют нанодиапазону, т.е. 10^{-9} (в единицах СИ). Так что уже сотню лет назад точнее было бы говорить о «наномире», да это слово и больше соответствует современным призывам к «инновациям» и «нанотехнологиям».

Но раз мы заговорили о температуре, о тепловом хаосе, то нельзя не вспомнить замечательный термодинамический цикл Карно, который состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис.2,*а*). Замечательное свойство этого цикла состоит в том, что машина, работающая по нему, обладает наибольшим коэффициентом полезного действия

$$\eta_{\max} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

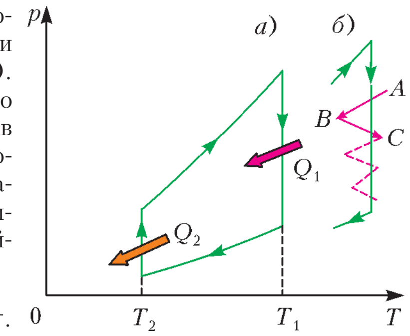


Рис.2. а) Цикл Карно в координатах давление–температура; б) флуктуации температуры на «изотерме»

И здесь возникает принципиальный вопрос: каким образом количество теплоты Q_1 от нагревателя, имеющего температуру T_1, передается рабочему телу тепловой машины, тоже имеющему температуру T_1? И точно так же – зачем количеству теплоты Q_2 при температуре T_2 утекать из машины в окружающее пространство (в холодильник) с той же температурой? Ведь нулевое начало термодинамики (в этой науке нет моделей, а есть «начала» и «принципы», что делает ее самой общей из всех физических наук) говорит о том, что тепло передается от более нагретого тела к менее нагретому. Как же в таком случае работает тепловая машина на изотермах T_1 и T_2? (Заметим, что два других отрезка цикла не пропускают тепло: не случайно они называются по-гречески адиабатами, т.е. непереходимыми.)

Одно из объяснений использует понятие флуктуации температуры. Оказывается, существует принцип, связывающий неопределенность энергии и неопределенность температуры:

$$\Delta E\cdot\Delta\frac{1}{T} \ge k. \qquad (2)$$

Здесь постоянная Больцмана играет роль, аналогичную роли постоянной Планка в соотношении (1). Этот принцип был «нащупан» еще Гиббсом и изложен в его замечательной монографии (1902 г.), завершившей создание классической статистической физики, с пышным названием, напоминающим средневековые трактаты: «Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики».

Конечно, Гиббс еще не знал понятия «постоянная Больцмана», так что в форме (2) этот принцип был сформулирован позднее Эйнштейном. Теперь мы можем представить себе изотерму не в виде прямой линии T_1 = const, а в виде некоторой ломаной (рис.2,*б*): в какие-то моменты времени из-за флуктуаций температуры рабочее тело становится чуть-чуть холоднее нагревателя и его тепло течет к рабочему телу тепловой машины (на участке AB); в другие моменты тело становится чуть-чуть горячее нагревателя, и часть тепла уходит назад (участок BC). Аналогичный процесс происходит на изотерме T_2 , на которой тепло отводится от рабочего тела к холодильнику.

Итак, две фундаментальные физические константы – два принципа неопределенности.

Но только ли в физике обнаружены такие принципы? В 1931 году австрийский логик, математик и философ математики Курт Гёдель доказал теорему, смысл которой вкратце можно выразить так: невозможно создать систему аксиом одновременно полную и непротиворечивую. Если последние два понятия можно было бы выразить в виде чисел, то на соответствующей плоскости (рис.3), вероятно, возникла бы запретная зона, аналогичная прямоугольникам на рисунке 1. В результате один из замечательных ученых, анализируя историю и методологию математики, совсем было расстроил-

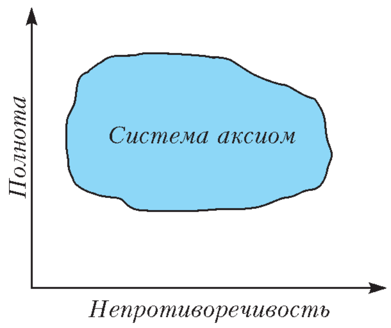


Рис.3. Иллюстрация неопределенностей в плоскости понятий полнота–непротиворечивость

ся: «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, "не имеющие пристанища в математическом мире..." Теорема Гёделя вызвала смятение в рядах математиков. Последующее развитие событий привело к новым осложнениям... Итак, статус математики ничем не лучше статуса физики» (*М.Клайн*. Математика. Утрата определенности).

Но так ли уж плохо, что нам запрещено что-либо знать слишком точно? Вот что пишут по этому поводу в одном философском сборнике: «В настоящее время можно считать доказанной несводимость знания к идеалу абсолютной строгости... Все это свидетельствует не только о том, что любая система человеческого знания включает в себя элементы, не могущие быть обоснованными теоретическими средствами вообще, но и о том, что без наличия подобного рода элементов не может существовать никакая научная система знания».

Возможно, став большими, вы постараетесь принять этот вызов Природы и проникнуть в запретные зоны, которые манят любознательных своей принципиальной недостижимостью.

А как же рояль? Его все-таки протащили в дверь! Ему, *макроскопическому*, принцип неопределенности нипочем.

Дополнительная литература

1. *А.Стасенко*. Бог что-то скрывает от нас, или О принципах неопределенности («Квант», 1993, №9–10).

2. *А.Д.Суханов*. Фундаментальный курс физики. Том 4. Статистическая физика (М.: Агар, 2004).

Модуль во всей красе

В.ГОЛУБЕВ

Вступление

Автор приносит извинения читателю за столь нескромное название статьи. Это сделано умышленно с целью привлечь внимание максимально широкой аудитории к знакомству с излагаемой ниже информацией.

Мы на примере уравнений с модулем попытаемся показать возможности легче и быстрее прийти к ответу, которые часто упускают из виду.

Читатель познакомится с тремя основными методами решения уравнений с модулем. Это

– метод интервалов,
– метод перебора,
– метод спецпреобразований.

Метод интервалов изложен во всех школьных учебниках и многочисленных пособиях для поступающих в вузы страны, поэтому желающие его могут пропустить. Наша, однако, обязанность состоит в том, чтобы указать на те моменты при решении данным методом, которые позволяют выигрывать время, столь ценное на любых математических испытаниях.

Метод перебора впервые излагается как метод, который для целого класса задач с модулем значительно мощнее метода интервалов. Сразу отметим, что он абсолютно доступен любому читателю.

И, наконец, метод спецпреобразований предназначен для решения задач скорее олимпиадного уровня. Этот метод, если он применим, явно сильнее первых двух.

В статье рассматриваются следующие три уравнения:

(A) $$\left|x^2+x-90\right|+2\left|x^2-9\right|+3\left|x^2-27x+180\right|=\left|x^2+55x-468\right|,$$

(B) $$\left|x^2-3x-78\right|+2\left|x^2-4x-6\right|+3\left|x^2-23x+106\right|=\left|x^2+51x-526\right|,$$

(C) $$2\left|x^2+2x-36\right|+3\left|x^2-6x-28\right|+2\left|x^2-14x+12\right|=\left|x^2+26x-124\right|.$$

Мы специально использовали квадратичные выражения в этих уравнениях, чтобы обеспечить доступность изложения школьникам 7–11 классов.

Прежде чем знакомиться с решениями, предлагаем читателю попробовать самостоятельно справиться с уравнениями (A) и (B). Уравнение (C) прекрасно решается методом спецпреобразований.

Решение методом интервалов уравнения (A)

На первом шаге решения уравнения методом интервалов определяются все значения неизвестной переменной, при которых обращаются в ноль подмодульные выражения:

$$x^2+x-90=0 \Rightarrow x_1=-10,\ x_2=9;$$

$$x^2-9=0 \Rightarrow x_3=-3,\ x_4=3;$$

$$x^2-27x+180=0 \Rightarrow x_5=12,\ x_6=15;$$

$$x^2+55x-468=0 \Rightarrow x_7=\frac{-55-\sqrt{4897}}{2},\ x_8=\frac{-55+\sqrt{4897}}{2}.$$

На втором шаге полученные восемь корней мы должны расположить по возрастанию на числовой оси переменной x. Очевидно, что

$$\frac{-55-\sqrt{4897}}{2}<-10<-3<3<9<12<15,$$

т.е.

$$x_7<x_1<x_3<x_4<x_2<x_5<x_6.$$

Однако нам пока неизвестно, как на оси переменной x располагается значение $x_8=\frac{-55+\sqrt{4897}}{2}$. Обычно оценивают приближенно данное значение. Например, ясно, что $65=\sqrt{4225}<\sqrt{4897}<\sqrt{4900}=70$. Поэтому $5=\frac{-55+\sqrt{4225}}{2}<x_8<\frac{-55+\sqrt{4900}}{2}=7{,}5$, откуда следует, что

$$x_4<x_8<x_2.$$

Это, наконец, позволяет нам все корни подмодульных выра-

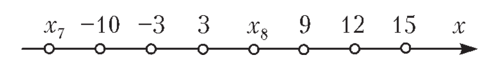


Рис. 1

жений расположить на числовой прямой в правильном порядке (рис.1).

Авторы школьных учебников далее предлагают решать исходное уравнение на каждом из девяти полученных числовых промежутков. Мы хотим предложить читателю существенно сэкономить свои усилия, указав на некоторые шаги, не описанные в учебниках. Для этого нам необходимо помимо отыскания корней установить знаки подмодульных выражений на всех числовых промежутках и полученную информацию представить в виде таблицы:

	$(-\infty;x_7)$	$(x_7;-10)$	$(-10;-3)$	$(-3;3)$	$(3;x_8)$	$(x_8;9)$	$(9;12)$	$(12;15)$	$(15;\infty)$
x^2+x-90	+	+	−	−	−	−	+	+	+
x^2-9	+	+	+	−	+	+	+	+	+
$x^2-27x+180$	+	+	+	+	+	+	+	−	+
$x^2-55x+468$	+	−	−	−	−	+	+	+	+

Эта таблица мгновенно подсказывает, что в силу совпадения знаков подмодульных выражений на промежутках $(-\infty;x_7]$, $(9;12]$ и $(15;\infty)$ в этих случаях получится одно и то же уравнение. Аналогичная ситуация складывается и для промежутков $(-10;-3]$ и $(3;x_8]$. Отсюда следует, что уравнение надо решать всего на шести промежутках.

Замечание. Уменьшить число случаев так, как было показано, часто оказывается возможным при решении любых уравнений и неравенств с модулем методом интервалов.

Следующий эффектный ход обусловлен спецификой обсуждаемого уравнения. Если взглянуть на таблицу, то можно обнаружить, что при переходе от промежутка $(-3;3]$ к промежутку $(12;15]$ все подмодульные выражения одновременно меняют знак на противоположный. Исходное уравнение на промежутке $(-3;3]$ принимает вид

$$-\left(x^2+x-90\right)-2\left(x^2-9\right)+3\left(x^2-27x+180\right)=$$
$$=-\left(x^2+55x-468\right),$$

а на промежутке $(12;15]$ –

$$x^2+x-90+2\left(x^2-9\right)-3\left(x^2-27x+180\right)=x^2+55x-468.$$

Ясно, что эти два уравнения равносильны, поскольку одно получается из другого умножением обеих частей на −1. Поэтому на самом деле нужно решать наше уравнение только на пяти промежутках:

$$x\in\left(-\infty;\frac{-55-\sqrt{4897}}{2}\right]\cup(9;12]\cup(15;+\infty),$$
$$\frac{-55-\sqrt{4897}}{2}<x\le-10,$$
$$x\in(-10;-3]\cup\left(3;\frac{-55+\sqrt{4897}}{2}\right],$$
$$x\in(-3;3]\cup(12;15],$$
$$\frac{-55+\sqrt{4897}}{2}<x\le 9.$$

Согласно таблице для указанных интервалов раскрываем все модули. Получается следующая совокупность систем:

$$\begin{cases}x\in\left(-\infty;\dfrac{-55-\sqrt{4897}}{2}\right]\cup(9;12]\cup(15;\infty),\\ 5\left(x^2-27x+180\right)=0;\end{cases}\qquad(\text{A}.1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{-55-\sqrt{4897}}{2}<x\le-10,\\ 7x^2-25x-36=0;\end{cases}\qquad(\text{A}.2)$$

$$\begin{cases}x\in(-10;-3]\cup\left(3;\dfrac{-55+\sqrt{4897}}{2}\right],\\ 5x^2-27x+144=0;\end{cases}\qquad(\text{A}.3)$$

$$\begin{cases}x\in(-3;3]\cup(12;15],\\ x^2-27x+180=0;\end{cases}\qquad(\text{A}.4)$$

$$\begin{cases}\dfrac{-55+\sqrt{4897}}{2}<x\le 9,\\ 3x^2-137x+1080=0.\end{cases}\qquad(\text{A}.5)$$

Дискриминант квадратного трехчлена в уравнении системы (А.3) отрицателен, т.е. она решений не имеет. А квадратные уравнения систем (А.1) и (А.4) эквивалентны. Поэтому можно немного упростить совокупность, выкинув систему (А.3) и объединив промежутки систем (А.1) и (А.4). В итоге получаем, что исходное уравнение равносильно такой совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\dfrac{-55+\sqrt{4897}}{2}<x\le 9,\\ 3x^2-137x+1080=0;\end{cases} & (\text{A}.6)\\ \begin{cases}x\in\left(-\infty;\dfrac{-55-\sqrt{4897}}{2}\right]\cup(-3;3]\cup(9;\infty),\\ x^2-27x+180=0;\end{cases} & (\text{A}.7)\\ \begin{cases}\dfrac{-55-\sqrt{4897}}{2}<x\le-10,\\ 7x^2-25x-36=0.\end{cases} & (\text{A}.8)\end{array}\right.$$

График левой части уравнения $3x^2-137x+1080=0$ в системе (А.6) – это парабола с ветвями, направленными вверх. Абсцисса ее вершины равна $\frac{137}{6}$, что больше 20. С другой стороны, при $x=10$ имеем $3x^2-137x+1080=300-$ $-1370+1080=10>0$. Отсюда корни уравнения из системы (А.6) больше 10, а значит, система не имеет решений.

Уравнение системы (А.7) мы уже решали, когда определяли промежутки, поэтому

$$(\text{A}.7)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;\dfrac{-55-\sqrt{4897}}{2}\right]\cup(-3;3]\cup(9;\infty),\\ x\in\{12;15\}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=12 \text{ или } x=15.$$

Анализ системы (А.8) показывает, что график левой части уравнения $7x^2-25x-36=0$ есть парабола с ветвями, направленными вверх, с вершиной, имеющей абсциссу $\frac{25}{14}$, и с положительной ординатой при $x=-10$ (рис.2). Поэтому система (А.8) решений не имеет.

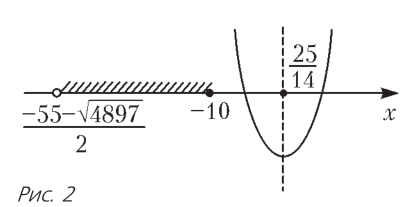


Рис. 2

Установить, что система (А.8) не имеет решений, можно и по-другому. Например, по теореме Виета обнаруживаем, что произведение корней уравнения, равное −36, отрицательно. Следовательно, решением системы (А.8) может быть только отрицательный корень $x=\frac{25-\sqrt{1633}}{14}$, так как промежуток значений переменной x в системе (А.8) содержит только отрицательные значения.

Очевидно, что $\dfrac{25-\sqrt{1633}}{14} > \dfrac{25-\sqrt{1681}}{14} = \dfrac{25-41}{14} > -10$. Поэтому система (А.8) решений не имеет.

Итак, исходное уравнение имеет корни $x = 12$ и $x = 15$.

Ответ: $\{12; 15\}$.

Решение методом перебора уравнения (В)

Мы для убедительности взяли более тяжелое уравнение, в котором все подмодульные выражения имеют иррациональные корни. Именно по этой причине его неудобно решать методом интервалов.

Уравнение (В) содержит четыре модуля. Поэтому, если не вникать во взаимосвязи между подмодульными выражениями, возможно появление шестнадцати ($2^4 = 16$) различных уравнений после раскрытия всех модулей:

1. (++++)	5. (+−++)	9. (−+++)	13. (−−++)
2. (+++−)	6. (+−+−)	10. (−++−)	14. (−−+−)
3. (++−+)	7. (+−−+)	11. (−+−+)	15. (−−−+)
4. (++−−)	8. (+−−−)	12. (−+−−)	16. (−−−−)

В скобках указаны знаки подмодульных выражений в этом варианте. Рассмотрим все варианты.

Вариант 1 (++++)

Должны выполняться такие неравенства:

$$\begin{cases} x^2-3x-78 \ge 0, \\ x^2-4x-6 \ge 0, \\ x^2-23x+106 \ge 0, \\ x^2+51x-526 \ge 0. \end{cases} \qquad \text{(В.1)}$$

При этих условиях уравнение (В) принимает вид

$$\left(x^2-3x-78\right)+2\left(x^2-4x-6\right)+3\left(x^2-23x+106\right) =$$
$$= x^2+51-526 \Leftrightarrow 5x^2-131x+754=0.$$

Поскольку дискриминант $D = 131^2 - 20\cdot 754 = 2081 > 0$, придется выяснять, какие из двух корней уравнения удовлетворяют системе неравенств (В.1), т.е. мы должны решить смешанную систему

$$\begin{cases} x^2-3x-78 \ge 0, \\ x^2-4x-6 \ge 0, \\ x^2-23x+106 \ge 0, \\ x^2+51x-526 \ge 0, \\ 5x^2-131x+754=0. \end{cases} \qquad \text{(В.1а)}$$

На первый взгляд система вызывает тоску и уныние. Но мы применим удивительный «финт», который позволит быстро с ней разобраться.

Очевидно, что решением системы могут быть только корни уравнения, которое гласит: *квадрат корня есть линейная (!) функция этого корня*, $x^2 = (131x-754)/5$.

Таким образом, уравнение можно толковать как *формулу понижения степени* его корня. А тогда система легко и быстро упрощается.

Итак, имеем

$$\begin{cases} 131x-754/5-3x-78 \ge 0, \\ 131x-754/5-4x-6 \ge 0, \\ 131x-754/5-23x+106 \ge 0, \\ 131x-754/5+51x-526 \ge 0, \\ 5x^2-131x+754=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 116x \ge 1144, \\ 111x \ge 784, \\ 16x \ge 224, \\ 386x \ge 3384, \\ 5x^2-131+754=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \max\left\{\dfrac{286}{29}; \dfrac{784}{111}; 14; \dfrac{1692}{193}\right\}, \\ 5x^2-131x+754=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 14, \\ 5x^2-131x+754=0. \end{cases} \qquad \text{(В.1б)}$$

Согласитесь, дорогой читатель, что идея понижения степени корня резко упростила систему (В.1а). Осталось разобраться, какой из корней уравнения удовлетворяет неравенству $x \ge 14$. Пусть $f(x) = 5x^2-131x+754$, тогда обнаруживаем, что $f(14) = -100 < 0$. И так как старший коэффициент больше нуля, то только больший корень уравнения является решением системы (В.1б), а значит, и решением исходного уравнения (В) при варианте 1.

Ответ варианта 1: $x = \dfrac{131+\sqrt{2081}}{10}$.

Вспомним теперь, что наше уравнение обладает тем свойством, что при одновременном изменении знаков всех четырех подмодульных выражений на противоположные мы получаем равносильное уравнение. Значит, уравнение, варианта 1 совпадает с уравнением **варианта 16**. Этот факт позволяет сразу объявить, что при варианте 16 мы должны решить следующую систему:

$$\begin{cases} 116x < 1144, \\ 111x < 784, \\ 16x < 224, \\ 386x < 3384, \\ 5x^2-131x+754=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \min\left\{\dfrac{286}{29}; \dfrac{784}{111}; 14; \dfrac{1692}{193}\right\}, \\ 5x^2-131x+754=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{784}{111} \\ 5x^2-131x+754=0. \end{cases}$$

Как и в варианте 1, устанавливаем, что оба корня уравнения лежат вне промежутка $\left(-\infty; \dfrac{784}{111}\right)$: мы уже знаем, что $f(14) < 0$, далее замечаем, что $f(8) > 0$, откуда все корни уравнения больше 8, но $\dfrac{784}{111} < 8$.

Ответ варианта 16: решений нет.

Поскольку Вы, дорогой читатель, познакомились с идеей решения вариантов 1 и 16, то по остальным вариантам мы даем конспекты получения их ответов.

Варианты 2 (+++−) и 15 (−−−+)

Уравнение (В) преобразуется в $7x^2-29x-298=0$, т.е. $7x^2 = 29x+298$. Тогда для варианта 2 система неравенств принимает вид

$$\begin{cases} (29x+298)+7(-3x-78) \ge 0, \\ (29x+298)+7(-4x-6) \ge 0, \\ (29x+298)+7(-23x+106) \ge 0, \\ (29x+298)+7(51x-526) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 31, \\ x+256 \ge 0, \\ x \le 260/33, \\ 193x < 1692 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing, \text{ так как } 31 > \dfrac{260}{33}.$$

Аналогично, для варианта 15:

$$\begin{cases} 7x^2-29x-298=0, \\ x < 31, \\ x < -256, \\ x > 260/33, \\ 193x \ge 1692 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

(Продолжение см. на с. 50)

...урановые лучи... могут проникать через тонкие металлические экраны, и они разряжают наэлектризованные тела.

Мария Склодовская-Кюри

...вероятность того, что альфа-частица может претерпеть рассеяние в обратном направлении, ничтожно мала.

Эрнест Резерфорд

...эти странные эффекты обязаны своим происхождением нейтральной частице; мне удалось также измерить ее массу.

Джеймс Чедвик

После фотонов частицами, лучше всего известными из эксперимента и лучше других описываемыми теорией, являются электроны и позитроны.

Энрико Ферми

Поиски происхождения ядерных сил приводят нас к новым частицам; но все эти открытия вызывают только замешательство. У нас нет полного понимания их взаимных отношений, хотя в некоторых поразительных связях между ними мы уже убедились.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам частицы и ядра?

Нынешний выпуск «Калейдоскопа» недаром посвящен этим физическим персонажам.

Во-первых, один за другим прошли столетние юбилеи выдающихся открытий, кардинально изменивших облик сложившейся к началу XX века науки. Обнаружение рентгеновских лучей, электрона, радиоактивности, атомного ядра, создание теории относительности буквально на глазах изумленных ученых переворачивали устоявшиеся представления об устройстве как микромира, так и Вселенной в целом, требовали изобретения нового «языка» для изменившейся реальности. Ядерная физика и физика элементарных частиц оказались на острие этой эпохальной перестройки. Все авторы приведенных в эпиграфе высказываний – участники исторических событий, творцы новой картины Мира, удостоенные Нобелевской премии. А скольких еще блестящих ученых, кто, пройдя через сомнения и разочарования, продолжали и продолжают «дорисовывать» это поразительное полотно, мы не в силах упомянуть!

Во-вторых, похоже, что надежды ученых на достоверность этой согласованной картины устройства нашего мироздания – так называемой Стандартной модели, описывающей с общих позиций взаимодействие между элементарными частицами, могут сбыться буквально в наши дни. Из ЦЕРНа (Европейский центр по ядерным исследованиям), где действует самый мощный современный ускоритель – Большой адронный коллайдер, пришло сообщение о возможном открытии давно предсказанной, но до сих пор неуловимой, недостающей для полноты Стандартной модели частицы – бозона Хиггса. Такое экспериментальное подтверждение создаваемой поколениями физиков теории стало бы первостепенным событием в уже более чем столетней истории новой науки.

И в-третьих, «Физический «Калейдоскоп» тоже скромно справляет свой юбилей – это его сотый выпуск! Мы будем рады, если на этот раз сможем дополнить ваши знания о частицах и ядрах.

Вопросы и задачи

1. У какого химического элемента радиус атомного ядра примерно вдвое больше, чем у углерода?

2. Произошел самопроизвольный распад ядра. Выделилась или поглотилась энергия во время этого процесса?

3. Какая доля от большого количества радиоактивных атомов остается нераспавшейся через интервал времени, равный двум периодам полураспада?

4. Радий, период полураспада которого 1620 лет, казалось бы, уже должен был полностью распасться. Каким образом он «дожил» до наших дней?

5. После скольких альфа-распадов и скольких бета-распадов изотоп радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ превращается в изотоп свинца $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$?

6. От чего зависит период полураспада ядер, испускающих альфа-частицы?

7. После ядерного взрыва в атмосферу попали в равных количествах радиоактивные изотопы с разными периодами полураспада. Какие из них таят в себе наибольшую биологическую опасность?

8. Одинаковы ли ядерные силы, действующие между двумя протонами, двумя нейтронами, протоном и нейтроном?

9. Открытие мощных ядерных сил позволило объяснить, почему атомные ядра не «взрываются» под действием кулоновских сил отталкивания. Но почему же тогда ядра не сжимаются беспредельно?

10. Отчего медленные нейтроны сильно поглощаются ядрами атомов, например бора, кадмия, лития, а быстрые нейтроны – поглощаются слабо?

11. Как объяснить, что в камере Вильсона бета-частицы от одного и того же радиоактивного изотопа не обладают одной и той же длиной пробега?

12. Что было бомбардирующей частицей в исторически первой ядерной реакции

$$? + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \Rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}p,$$

осуществленной Резерфордом?

13. Может ли нейтральная частица распадаться на нечетное число заряженных элементарных частиц?

14. Свободные нейтроны превращаются в протоны. Почему обратный процесс возможен только внутри атомных ядер?

15. Чем отличается трек протона от трека позитрона в камере Вильсона?

16. Отчего ядерные реакции с нейтронами в космических условиях происходят очень редко, хотя нейтрон, в отличие от протона, может подойти к ядру на любое расстояние?

17. Почему во Вселенной преобладают ядерные реакции синтеза, а не реакции деления?

18. Может ли один гамма-квант превратиться в пару электрон–позитрон?

Микроопыт

Зарядите электроскоп любым наэлектризованным телом, хотя бы расческой, проведенной по сухим волосам, и понаблюдайте за поведением его лепестков. В чем, по-вашему, причина относительно быстрой разрядки электроскопа?

Любопытно, что…

…объем, приходящийся на каждую внутриядерную частицу, во всех ядрах практически один и тот же. Радиус ядра меняется от $0{,}5 \cdot 10^{-15}$ м у водорода до $8 \cdot 10^{-15}$ м у урана. В ядерной физике в качестве единицы длины введена специальная величина 1 ферми: 1 фм = 10^{-15} м, названная так в честь великого итальянского физика Энрико Ферми.

…в 1897 году после сорока лет экспериментальных усилий получила «права гражданства» первая элементарная частица – электрон. Как и атом, признали ее не сразу. Так, английский физик Оливер Лодж, известный своим доказательством несостоятельности теории эфира, считал электрон чисто гипотетическим зарядом, изолированным от атома. А знаменитый Вильгельм Рентген (более правильно – Рёнтген) – первый Нобелевский лауреат среди физиков – почти до конца жизни сомневался в его существовании.

…в двадцатые годы прошлого века, еще до открытия нейтрона, возникла протонно-электронная модель атомного ядра, предполагавшая наличие внутри ядра электронов. Так, ядро гелия должно было состоять из четырех протонов и двух электронов.

…на вероятностный, случайный характер радиоактивности обратил внимание еще в 1905 году австрийский физик Эгон Швейдлер. Это было первым свидетельством квантовых особенностей внутриядерных процессов. А к концу двадцатых годов основные представления квантовой механики стали надежной основой науки о всех явлениях атомной и ядерной физики.

…Солнце не взрывается, как водородная бомба, хотя в обоих случаях энергия выделяется за счет термоядерных реакций превращения водорода в гелий. Отличие связано с тем, что в этих реакциях участвуют разные изотопы водорода. В бомбе используются специально накапливаемые дейтерий и тритий. А в звездах дейтерий успел давным-давно «сгореть» в недрах светила, тритий же радиоактивен с периодом полураспада 12,5 лет, и в природе его нет.

…процесс, обратный аннигиляции – превращению электрона и позитрона в два гамма-кванта, впервые удалось наблюдать в 1971 году в ускорителях на встречных пучках, где высокоэнергетические фотоны, провзаимодействовав, порождали пару частица–античастица. В конце прошлого века экспериментаторам удалось на миллиардные доли секунды создать из антипротонов и позитронов атомы антиводорода, а совсем недавно с помощью Большого адронного коллайдера эту антиматерию не только произвели, но и сумели удержать более чем на тысячу секунд.

…физики из подмосковной Дубны совместно с американскими коллегами впервые смогли синтезировать 117-й элемент таблицы Менделеева. Полученные искусственно ранее элементы с атомными номерами 114 и 116 этой весной заняли в таблице места на законных основаниях, когда были утверждены их названия – флеровий и ливерморий. А в последние годы российские ученые, исследуя метеориты, обнаружили в тех следы этих сверхтяжелых элементов, что свидетельствует об их наличии в космических лучах.

…один из многочисленных примеров практического использования достижений фундаментальной науки – нейтронные исследования. Нейтроны применяются в разработке методов борьбы с раком, в изучении процесса старения клеток, в создании новых материалов с необычными свойствами и даже… для поиска воды на Марсе. Истинно инновационным решением стало создание детектора взрывчатых и наркотических веществ на основе метода меченых нейтронов.

…заменив «маятник» в атомных часах с электрона, обращающегося вокруг ядра, на нейтрон, располагающийся в ядре, удалось на два порядка превзойти по точности лучшие современные атомные «хронометры». Теперь неточность составляет порядка одной десятой секунды за 14 миллиардов лет (это сравнимо с возрастом Вселенной).

Что читать в «Кванте» о частицах и ядрах
(публикации последних лет)

1. «Премия за нарушения» – 2009, №1, с.19;
2. «Калейдоскоп «Кванта» – 2009, №1, с.32;
3. «Устроители столкновений» – 2009, №2, с.19;
4. «Многоликий протон» – 2009, №5, с.7;
5. «Что такое ЯМР-томография?» – 2010, №1, с.8;
6. «Квантовые и волновые явления в наномире» – 2010, №3, с.17;
7. «Ядерные взрывы» – 2010, Приложение №3, с.83;
8. «Атомные ядра», «Элементарные частицы и силы между ними» – 2011, Приложение №4, с.51, 55.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 45)

Ответ вариантов 2 и 15: решений нет.

Варианты 3 (++−+) и 14 (−−+−)

$$\begin{cases} x^2-7x-118=0,\\ \begin{cases}4x+40\ge 0,\\ 3x+112\ge 0,\\ -16x+224<0,\\ 58x-408\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}4x+40<0,\\ 3x+112<0,\\ -16x+224\ge 0,\\ 58x-408<0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x-118=0,\\ x>14 \text{ или } x<-112/3\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{521}}{2}.$$

Ответ вариантов 3 и 14: $x=\dfrac{7+\sqrt{521}}{2}$.

Варианты 4 (++−−) и 13 (−−++)

$$\begin{cases} x^2+109x-934=0,\\ \begin{cases}-112x+856\ge 0,\\ 928-113x\ge 0,\\ -132x+1040<0,\\ -58x+408<0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}-112x+856<0,\\ 928-113x<0,\\ -132x+1040\ge 0,\\ -58x+408\ge 0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Ответ вариантов 4 и 13: решений нет.

Варианты 5 (+−++) и 12 (−+−−)

$$\begin{cases} x^2-115x+778=0,\\ \begin{cases}112x-856\ge 0,\\ 111x-784<0,\\ 92x-672\ge 0,\\ 166x-1304\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}112x-856<0,\\ 111x-784\ge 0,\\ 92x-672<0,\\ 166x-1304<0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-115x+778=0,\\ x\in\varnothing \quad\text{или}\quad x\in\left[\dfrac{784}{111};\dfrac{168}{23}\right]\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{115-\sqrt{10113}}{2}.$$

Ответ вариантов 5 и 12: $x=\dfrac{115-\sqrt{10113}}{2}$.

Варианты 6 (+−+−) и 11 (−+−+)

$$\begin{cases} 3x^2-13x-274=0,\\ \begin{cases}4x+40\ge 0,\\ x+256<0,\\ -56x+592\ge 0,\\ 164x-1304<0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}4x+40<0,\\ x+256\ge 0,\\ -56x+592<0,\\ 164x-1304<0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-13x-274=0,\\ x\in\varnothing \text{ или } x\in\varnothing\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Ответ вариантов 6 и 11: решений нет.

Варианты 7 (+−−+) и 10 (−++−)

$$\begin{cases} 5x^2-23x-142=0,\\ \begin{cases}8x-248\ge 0,\\ 3x+112<0,\\ -92x+672<0,\\ 278x-2488\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}8x-248<0,\\ 3x+112\ge 0,\\ -92x+672\ge 0,\\ 278x-2488<0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-23x-142=0,\\ x\in\varnothing \text{ или } -37\dfrac{1}{3}\le x\le 7\dfrac{7}{23}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{23-\sqrt{3369}}{10}.$$

Ответ вариантов 7 и 10: $x=\dfrac{23-\sqrt{3369}}{10}$.

Варианты 8 (+−−−) и 9 (−+++)

$$\begin{cases} 3x^2-125x+910=0,\\ \begin{cases}116x-1144\ge 0,\\ 113x-928<0,\\ 56x-592<0,\\ 278x-2488<0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}116x-1144<0,\\ 113x-928\ge 0,\\ 56x-592\ge 0,\\ 278x-2488\ge 0\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-125x+910=0,\\ x\in\varnothing \text{ или } x\in\varnothing\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Ответ вариантов 8 и 9: решений нет.

Объединяя ответы всех вариантов, получаем ответ уравнения (B):

$$x\in\left\{\frac{131+\sqrt{2081}}{10};\ \frac{7+\sqrt{521}}{2};\ \frac{23-\sqrt{3369}}{10};\ \frac{115-\sqrt{10113}}{2}\right\}.$$

Решение методом спецпреобразований уравнения (C)

Итак, нужно решить уравнение

$$2\left|x^2+2x-36\right|+3\left|x^2-6x-28\right|+2\left|x^2-14x+12\right|=$$
$$=\left|x^2+26x-124\right|.$$

Самая мощная конструкция, эксплуатируемая авторами задач повышенной сложности по теме «Абсолютная величина», − *сумма модулей*. Этот факт обусловлен следующей теоремой.

Теорема. *Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда все подмодульные выражения принимают тот знак, с которым они вошли в алгебраическую сумму, либо все одновременно принимают противоположный знак.*

Это означает, что если $\alpha_i\in\{\pm1\}$, то

$$\sum|m_i|=\left|\sum\alpha_i m_i\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\forall i & \alpha_i m_i\ge 0,\\ \forall i & \alpha_i m_i\le 0.\end{array}\right.$$

Из этой теоремы следует, что если $\alpha_i\in[-1;1]$, то мы должны выделить слагаемые, у которых $\alpha_i\in\{-1;1\}$, и слагаемые, у которых $\alpha_i\in(-1;1)$. Для случая, когда $\alpha_i\in\{-1;1\}$, сформулированная теорема все объявила. А для случая, когда $\alpha_i\in(-1;1)$, *всегда* $m_i=0$.

Идею доказательства этого факта проиллюстрируем на простом примере. Пусть

$$|a|+|b|=\left|a+\frac12 b\right|. \qquad (*)$$

Тогда

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|a|+|b|=a+\dfrac12 b,\\ |a|+|b|=-a-\dfrac12 b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(|a|-a)+\left(|b|-\dfrac12 b\right)=0,\\ (|a|+a)+\left(|b|+\dfrac12 b\right)=0.\end{array}\right.$$

В левых частях полученных уравнений в скобках стоят неотрицательные величины при любых a и b. И так как сумма неотрицательных величин равна нулю тогда и только тогда, когда все величины одновременно равны нулю, то

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}|a|-a=0,\\ |b|-\dfrac12 b=0\end{cases} \text{или} \begin{cases}|a|+a=0,\\ |b|+\dfrac12 b=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\ge 0,\\ b=0\end{cases} \text{или} \begin{cases}a\le 0,\\ b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\in\mathbb{R},\\ b=0.\end{cases}$$

В уравнении (C) слева присутствует сумма модулей

$$m_1 = 2\left(x^2+2x-36\right) = 2x^2+4x-72,$$

$$m_2 = 3\left(x^2-6x-28\right) = 3x^2-18x-84,$$

$$m_3 = 2\left(x^2-14x+12\right) = 2x^2-28x+24,$$

т.е. оно имеет вид

$$|m_1|+|m_2|+|m_3| = |f(x)|.$$

Поэтому, если нам повезет и $f(x)$ окажется линейной комбинацией величин m_1, m_2 и m_3, то мы быстро и лихо решим уравнение (C). А если не повезет, то мы обречены на тяжелую рутинную работу с неизвестными шансами на успех. Иначе говоря, стандартная рекомендация в этом случае состоит в следующем: *если в уравнении присутствует сумма модулей, то полезно попробовать выяснить, можно ли выражение, которое находится вне суммы модулей, выразить в виде линейной комбинации подмодульных выражений слагаемых суммы модулей.*

В нашем случае нам необходимо выяснить, существуют ли такие числа α, β, γ, что

$$x^2+26x-124 = \alpha\left(2x^2+4x-72\right)+ \beta\left(3x^2-18x-84\right)+\gamma\left(2x^2-28x+24\right)$$

для всех значений x, т.е. чтобы это равенство было тождеством. Есть два пути поиска ответа на этот вопрос.

Путь первый. Раскроем в правой части тождества все скобки и приведем подобные члены. Получаем

$$x^2+26x-124 = (2\alpha+3\beta-2\gamma)x^2 + (4\alpha-18\beta-28\gamma)x+(-72\alpha-84\beta+24\gamma).$$

Как известно, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты равны. Откуда имеем такую систему:

$$\begin{cases}1 = 2\alpha+3\beta-2\gamma,\\ 26 = 4\alpha-18\beta-28\gamma,\\ -124 = -72\alpha-84\beta+24\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 1,\\ \beta = \dfrac{1}{3},\\ \gamma = -1.\end{cases}$$

Путь второй. В тождество подставить три удобных для счета значения и любым известным способом решить полученную линейную систему относительно α, β и γ.

Получаем, что наше уравнение (C) имеет вид

$$|m_1|+|m_2|+|m_3| = \left|m_1+\frac{1}{3}m_2-m_3\right|.$$

Согласно теореме, последнее равенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}|m_1| = m_1,\\ |m_3| = -m_3,\\ m_2 = 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}|m_1| = -m_1,\\ |m_3| = m_3,\\ m_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m_1 \ge 0,\\ m_3 \le 0,\\ m_2 = 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}m_1 \le 0,\\ m_3 \ge 0,\\ m_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m_1m_3 \le 0,\\ m_2 = 0.\end{cases}$$

А тогда уравнение (C) равносильно системе

$$\begin{cases}\left(2x^2+4x-72\right)\left(2x^2-28x+24\right) \le 0,\\ 3x^2-18x-84 = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^2+2x-36\right)\left(x^2-14x+12\right) \le 0,\\ x^2-6x-28 = 0.\end{cases}$$

Внимательный читатель может мгновенно подсказать автору: воспользуйтесь идеей понижения степени корня уравнения! Действительно, $x^2 = 6x+28$. Поэтому неравенство можно свести к линейному. Имеем

$$\left(x^2+2x-36\right)\left(x^2-14x+12\right) =$$

$$= \left((6x+28)+2x-36\right)\left((6x+28)-14x+12\right) =$$

$$= (8x-8)(-8x+40) = -64\left(x^2-6x+5\right) =$$

$$= -64\left((6x+28)-6x+5\right) = -64\cdot 33 < 0.$$

Откуда

$$(C) \Leftrightarrow x^2-6x-28 = 0 \Leftrightarrow x = 3\pm\sqrt{37}.$$

Ответ: $\left\{3-\sqrt{37}; 3+\sqrt{37}\right\}$.

Упражнения

1. Докажите, что

1) $|m_1|+|m_2|+|m_3| = |m_1+m_2+m_3| \Leftrightarrow \begin{cases}m_1m_2 \ge 0,\\ m_2m_3 \ge 0;\end{cases}$

2) $|m_1|+|m_2|+|m_3| = |m_1-m_2+m_3| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}m_1m_2 \le 0,\\ m_2m_3 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m_1m_3 \ge 0,\\ m_1m_2 \le 0;\end{cases}$

3) $|m_1|+|m_2|+|m_3| = |m_1-m_2-m_3| \Leftrightarrow \begin{cases}m_1m_2 \le 0,\\ m_2m_3 \ge 0;\end{cases}$

4) $2|a|+3|b|+2|c| = 2|a+b+c| \Leftrightarrow \begin{cases}b = 0,\\ ac \ge 0;\end{cases}$

5) $2|a|+3|b|+2|c| = |a-b-c| \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

2. Решите уравнения

1) $2\left(\left|x^2-16x+48\right|+\left|x^2-30x+200\right|\right)+3\left|x^2-24x+119\right| = \left|6x^2-134x+653\right|$.

2) $2\left(\left|x^2+5x-6\right|+\left|x^2-5x-14\right|-2\left|x^2+6x-29\right|\right)+ 3\left|x^2-x-20\right| = 0$.

3*. Решите уравнения

1) $2\left|x^2-5x+4\right|+3\left|x^2-7x+6\right|+2\left|x^2-11x+30\right| = 20;$

2) $\left|(x-1)(x-6)\right|\left(2|x-4|+3|x-5|\right)+ 2\left|(x-2)(x-5)(x-7)\right| = |x-7|;$

3) $2\left|x^3-10x^2+23x-14\right|+3\left|x^3-11x^2+31x-21\right|+ 2\left|x^3-13x^2+52x-69\right| = 5|x-5|;$

4) $\left|(x-1)(x-7)\right|\left(2|x-3|+3|x-4|\right)+ 2\left|(x-3)(x-5)(x-6)\right| = 8|x-6|;$

5) $2\left|x^3-9x^2+23x-15\right|+3\left|x^3-10x^2+31x-30\right|+ 2\left|x^3-12x^2+39x-28\right| = 8|x-4|;$

6) $\left|(x-3)(x-5)\right|\left(2|x-1|+3|x-2|\right)+ 2\left|(x-2)(x-4)(x-6)\right| = 3|x-4|.$

Указание:

$$2|u_1|+3|u_2|+2|u_3| = |2u_1-3u_2\pm u_3| \Leftrightarrow \begin{cases}u_1u_2 \le 0,\\ u_3 = 0.\end{cases}$$

Как составлять уравнения вида (С)

Опорная информация:

- $|m| = m \Leftrightarrow m \geq 0$;
- $|m| = -m \Leftrightarrow m \leq 0$;
- $|m| = \alpha m \Leftrightarrow m = 0$, если $\alpha \neq \pm 1$;
- $|m| - \alpha m \geq 0$ для любых m и $\alpha \in [-1;1]$;
- при $\alpha_i \in [-1;1]$

$$\sum |m_i| = \sum \alpha_i m_i \Leftrightarrow \forall i \; |m_i| = \alpha_i m_i .$$

Предлагаем один из вариантов.

1) Возьмем для удобства любые четыре целых числа на числовой оси переменной x (рис. 3).

Рис. 3

2) Разобьем эти четыре числа на две пары корней будущих приведенных квадратных трехчленов. Возможны три случая.

Случай 1 (рис. 4):

$$P = (x-k)(x-l) = x^2 - (k+l)x + kl$$

и

$$Q = (x-m)(x-n) = x^2 - (m+n)x + mn .$$

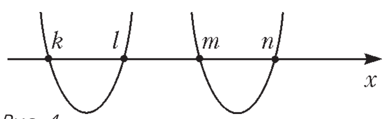


Рис. 4

Случай 2 (рис. 5):

$$P = (x-k)(x-m) = x^2 - (k+m)x + km$$

и

$$Q = (x-l)(x-n) = x^2 - (l+n)x + ln .$$

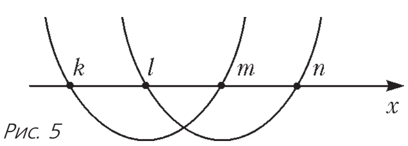


Рис. 5

Случай 3 (рис. 6):

$$P = (x-k)(x-n) = x^2 - (k+n)x + kn$$

и

$$Q = (x-l)(x-m) = x^2 - (l+m)x + lm .$$

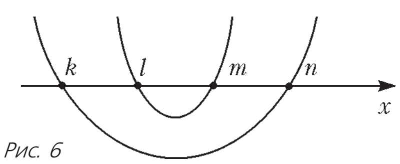


Рис. 6

3) На каждом из пяти интервалов во всех случаях получается своя комбинация знакопостоянства обоих трехчленов. Например, для случая 1 это показано на рисунке 7. Здесь

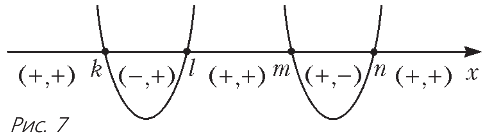


Рис. 7

первый знак – знак многочлена P, а второй знак – знак многочлена Q. Поэтому для получения наших уравнений во всех случаях объявляем указанным способом комбинации знакопостоянства многочленов P и Q.

4) Пусть x_1 и x_2 – будущие корни уравнения (С).

В каждом случае мы можем разместить эти корни на любых интервалах знакопостоянства многочленов P и Q. Поэтому принимайте самостоятельно решение, как далее порождать уравнение (С). Мы для примера рассмотрим только один вариант.

5) Получение уравнения (С) для случая 1.

Расположим на оси переменной x корни x_1 и x_2 (рис. 8). Из рисунка видно, что $P(x_1) < 0$ и $Q(x_1) > 0$, а $P(x_2) > 0$

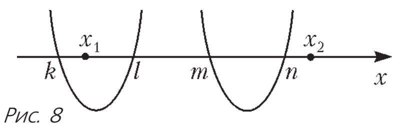


Рис. 8

и $Q(x_2) > 0$. Обозначим трехчлен с корнями x_1 и x_2 как $R(x)$, т.е.

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 .$$

Берем любую простейшую линейную комбинацию модулей многочленов P, Q и R. Например, $2|P| + 3|Q| + 2|R|$. Поскольку мы хотим. чтобы ответом были корни многочлена R (оба корня или один из них), мы берем линейную комбинацию многочленов P, Q и R, сохраняя модули коэффициентов для многочленов P и Q и уменьшая модуль коэффициента для многочлена R. Возникают следующие варианты:

1. $2P + 3Q + R$,
2. $2P + 3Q - R$,
3. $2P - 3Q + R$,
4. $2P - 3Q - R$.

Мы не варьировали знак у P, так как далее мы будем рассматривать модули полученных линейных комбинаций. Каждый вариант нам позволяет написать уравнение вида (С):

1. $2|P| + 3|Q| + 2|R| = |2P + 3Q + R|$,
2. $2|P| + 3|Q| + 2|R| = |2P + 3Q - R|$,
3. $2|P| + 3|Q| + 2|R| = |2P - 3Q + R|$,
4. $2|P| + 3|Q| + 2|R| = |2P - 3Q - R|$.

Упражнение 4. Опираясь на сформулированную выше теорему, докажите, что

1) вариант 1 $\Leftrightarrow$ варианту 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} R = 0, \\ PQ \geq 0; \end{cases}$

2) вариант 3 $\Leftrightarrow$ варианту 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} R = 0, \\ PQ \leq 0. \end{cases}$

Откуда следует, что в вариантах 1 и 2 ответом будет $x = x_2$, а в вариантах 3 и 4 – $x = x_1$.

Осталось уравнения всех вариантов записать в явном виде, например, в первом варианте получится

$$2P + 3Q + R = 2\left(x^2 - (k+l)x + kl\right) + \\ + 3\left(x^2 - (m+n)x + mn\right) + \left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right).$$

Отсюда

$$2\left|x^2 - (k+l)x + kl\right| + \\ + 3\left|x^2 - (m+n)x + mn\right| + 2\left|x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 x_2\right| = \\ = \left|6x^2 - \left(2(k+l) + 3(m+n) + (x_1 + x_2)\right)x + 2kl + 3mn + x_1 x_2\right| .$$

Ответ: $x = x_2$.

О разрезании выпуклых многоугольников

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Задачи на разрезание благодаря простоте и наглядности их формулировок всегда пользовались популярностью у любителей математики. При этом некоторые из этих задач оказываются весьма сложными. Например, сформулированная в начале прошлого века задача о разрезании квадрата на попарно различные квадраты меньших размеров была решена только спустя несколько десятилетий, причем для ее решения был разработан специальный метод, основанный на физической интерпретации разрезания. Удивительно, но этим же методом можно решить и, казалось бы, не имеющую никакого отношения к разрезаниям задачу о случайном блуждании. Подробнее об этом можно прочитать в книге М.Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М.: Мир, 1999) или в статье М.Скопенкова, М.Прасолова и С.Дориченко «Разрезания металлического прямоугольника» («Квант» №3 за 2011 год). Следует также заметить, что вопрос о наименьшем числе различных квадратов, на которые можно разрезать квадрат, до сих пор остается открытым.

Неожиданно сложными могут оказаться и задачи о разрезании многоугольников на треугольники. Например, не известно элементарное решение следующей задачи: можно ли разрезать квадрат на нечетное число равновеликих треугольников. Попробуйте самостоятельно решить две вполне элементарные, но тоже не очень простые задачи.

Упражнения

1. Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на а) прямоугольные; б) равнобедренные; в) тупоугольные; г) остроугольные треугольники.

2. На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать квадрат?

В этой статье мы будем разрезать выпуклые многоугольники на выпуклые многоугольники с попарно различным числом сторон. Вопрос, на который мы бы хотели найти ответ, можно сформулировать так.

Мегазадача. *Дан выпуклый n-угольник. При каких k его можно разрезать на k выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон?*

К сожалению, полного решения мегазадачи автор предложить читателям не может. Тем не менее, мы докажем несколько любопытных результатов, а именно:

1. *Для каждого k существует такое число n_k, что многоугольники, имеющие меньше n_k сторон, нельзя разрезать на k многоугольников, а многоугольники, имеющие n_k или больше сторон, – можно.*

2. *Для чисел n_k будут получены верхние и нижние оценки, которые при $k \le 17$ оказываются равными. Это позволяет дать ответ на вопрос мегазадачи при всех $n \le 100$.*

Разбор случая $n = 3$

Для $n = 3$ мегазадача предлагалась в «Задачнике «Кванта» (М1807). Напомним ее решение.

Пусть m – наибольшее из чисел сторон многоугольников разбиения. Так как соответствующий многоугольник выпуклый, к границе треугольника примыкает не более 3 его сторон (две стороны выпуклого многоугольника не могут лежать на одной прямой, значит, к каждой стороне треугольника примыкает не более одной стороны многоугольника). В силу выпуклости остальных $k-1$ многоугольников каждый из них граничит не более чем с одной стороной m-угольника. Следовательно, $m \le k+2$, и, значит, есть единственная возможность: треугольник разрезан на k многоугольников с числом сторон от 3 до $k+2$.

Так как $(k+2)$-угольник граничит с тремя сторонами исходного треугольника, $(k+1)$-угольник может граничить только с двумя из них (рис.1). Следовательно, он должен граничить со всеми остальными многоугольниками. Аналогично, k-угольник может граничить лишь с одной стороной исходного треугольника и, значит, граничит со всеми остальными многоугольниками. Наконец, $(k-1)$-угольник не может граничить со сторонами треугольника, так как в противном случае он будет граничить с каким-то из трех предыдущих многоугольников, поэтому он граничит со всеми многоугольниками.

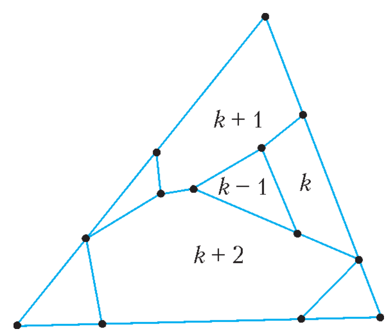


Рис. 1

Таким образом, при $k > 4$ пять многоугольников с наибольшим числом сторон попарно граничат друг с другом. Но на плоскости пять попарно граничащих областей существовать не могут,[1] следовательно, при $k > 4$ искомое разрезание невозможно. Пример разрезания с $k = 4$ приведен на рисунке 2. Построение примеров для $k = 2$, 3 не представляет сложностей.

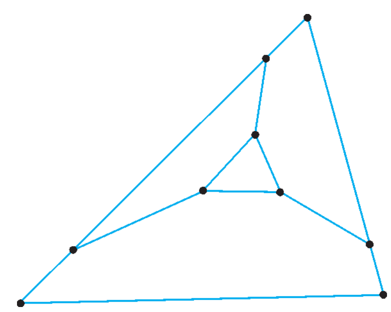


Рис. 2

К сожалению, попытка распространить приведенное рассуждение даже на случай $n = 4$ приводит к необходимости перебора большого числа вариантов. Решить же таким способом задачу для $n > 4$, скорее всего, вообще невозможно. Поэтому будем действовать иначе.

Задача 1. *Докажите, что если на k многоугольников можно разрезать n-угольник, то можно так разрезать и многоугольники с большим числом сторон.*

Решение. Достаточно показать, как можно из разрезания n-угольника получить разрезание $(n+1)$-угольника. Пусть многоугольник $A_1 \ldots A_n$ разрезан на многоугольники $P_1, \ldots, P_k$, имеющие $m_1 < \ldots < m_k$ сторон соответственно. Рассуждая так же, как в случае $n = 3$, можно убедиться, что многоугольник P_k содержит одну из сторон исходного n-угольника. Можно считать, что это сторона A_nA_1 многоугольника. Возьмем точку A_{n+1} вне многоугольника $A_1 \ldots A_n$ и достаточно близко к середине A_nA_1 так, чтобы углы

[1] Об этом можно прочесть, например, в книге В.Г.Болтянского и В.А.Ефремовича «Наглядная топология» (Библиотечка «Квант», вып.21).

$A_{n+1}A_1A_2$ и $A_{n+1}A_nA_{n-1}$ были меньше $180°$. Тогда выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_{n+1}$ будет разрезан на k выпуклых многоугольников: $P_1, \ldots, P_{k-1}$ и многоугольник, полученный из P_k заменой стороны A_nA_1 на ломаную $A_nA_{n+1}A_1$. Число сторон этого последнего многоугольника равно $m_k + 1$, т.е. больше, чем у любого из многоугольников $P_1, \ldots, P_{k-1}$.

Таким образом, для каждого k существует такое число n_k, что многоугольники, имеющие меньше чем n_k сторон, нельзя разрезать на k многоугольников, а многоугольники, имеющие n_k или больше сторон, – можно. Будем искать оценки для чисел n_k.

Нижняя оценка n_k

Пусть n-угольник разрезан на k многоугольников. Обозначим через S сумму углов этих многоугольников, измеренную в развернутых углах. Так как многоугольники имеют попарно различное число сторон, то $S \geq \frac{k(k+1)}{2}$.

Вершины многоугольников разбиения относятся к одному из следующих типов.

1) Вершины исходного многоугольника, являющиеся вершинами ровно одного многоугольника разбиения.

2) Вершины исходного многоугольника, являющиеся вершинами нескольких многоугольников разбиения. Обозначим их число через m, тогда вершин первого типа будет $n - m$.

3) Вершины, лежащие на сторонах исходного многоугольника. Обозначим их число через x.

4) Вершины, лежащие на сторонах многоугольников разбиения (и не совпадающие с их вершинами). Обозначим их число через y.

5) Вершины, не лежащие на сторонах исходного многоугольника и многоугольников разбиения. Обозначим их число через z.

Заметим, что сумма углов многоугольников разбиения в вершинах третьего и четвертого типов равна π, а в вершинах пятого типа – 2π. Отсюда получаем равенство

$$S = n - 2 + x + y + 2z . \qquad (1)$$

Далее, каждая из вершин второго, третьего или четвертого типов принадлежит хотя бы двум, а пятого – хотя бы трем многоугольникам разбиения. Поэтому для суммарного количества вершин этих многоугольников, равного $S + 2k$, получаем неравенство

$$S + 2k \geq (n - m) + 2m + 2x + 2y + 3z . \qquad (2)$$

Вычитая (1) из (2), получаем

$$2 + m + x + y + z \leq 2k .$$

С другой стороны, умножив равенство (1) на 2 и вычтя из него (2), получаем

$$n - 4 - m + z \geq S - 2k .$$

Пусть $l = m + x$ – количество многоугольников разбиения, граничащих с внешностью исходного n-угольника. Тогда, объединяя два полученных неравенства, получаем

$$S - 2k - n + 4 \leq z \leq 2k - l .$$

И, значит,

$$n \geq l + S - 4k + 6 \geq l + \frac{(k-3)(k-4)}{2} . \qquad (3)$$

Заметим теперь, что $l \geq 3$, и если убрать l многоугольников, образующих границу n-угольника, то получим область, ограниченную l выпуклыми внутрь ее ломаными и разрезанную на $k - l$ многоугольников. Продеформировав эти многоугольники, можно превратить область в выпуклый l-угольник. Следовательно, $l \geq n_{k-l}$. Подставляя в (3) минимальное l, удовлетворяющее этому неравенству, получим рекуррентное выражение для n_k. Воспользуемся им для вычисления нескольких первых значений:

k	n_k	l	k	n_k	l
≤4	3	3	11	34	6
5	4	3	12	42	6
6	6	3	13	52	7
7	9	3	14	63	8
8	14	4	15	75	9
9	19	4	16	87	9
10	26	5	17	101	10

Изучая эту таблицу, можно заметить следующие закономерности.

Если k увеличивается на 1, то l либо также увеличивается на 1, либо остается без изменения. При этом, если исключить малые значения k, при которых $l = 3$, интервалы между моментами сохранения l возрастают. Эту закономерность можно доказать по индукции.

На самом деле, проведенное нами рассуждение содержит довольно существенный пробел. Утверждение, что область, ограниченную l выпуклыми внутрь ломаными, можно продеформировать в выпуклый l-угольник, сохраняя структуру ее разрезания, нуждается в доказательстве. Более того, строгого математического доказательства этого факта автору найти не удалось. В качестве неформального аргумента в пользу его справедливости приведем следующую физическую интерпретацию требуемой деформации.

Предположим, что стороны внешних ломаных – жесткие палочки, соединенные шарнирами в вершинах, а внутренние стороны остальных многоугольников сделаны из пружинок, которые могут растягиваться (менять длину), но не могут сгибаться. В точках $C_1, \ldots, C_l$ – концах ломаных, ограничивающих область, – палочки прикреплены к плоскости. Теперь будем двигать точки $C_1, \ldots, C_l$, увеличивая расстояние между ними. Тогда соединяющие эти точки ломаные будут приближаться к отрезкам прямых, и в пределе мы получим выпуклый l-угольник. При этом внутренние пружинки по-прежнему будут образовывать выпуклые многоугольники.

Верхняя оценка n_k

Оценку сверху для чисел n_k также будем строить рекуррентно, увеличивая число многоугольников разбиения. Пусть n-угольник $A_1 \ldots A_n$ разрезан на k многоугольников, имеющих 3, 4, …, $k + 2$ сторон. Если на какой-то стороне A_iA_{i+1} n-угольника лежат две вершины B_1, B_2 многоугольников разбиения, то продеформируем эти многоугольники, сдвинув B_1, B_2 внутрь n-угольника $A_1 \ldots A_n$. В результате вместо стороны A_iA_{i+1} мы получим выпуклую внутрь n-угольника трехзвенную ломаную $A_iB_1B_2A_{i+1}$. Теперь возьмем на продолжении сторон $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$ за A_i и A_{i+1} точки C_1 и C_{k-1} и соединим их ломаной $C_1 \ldots C_{k-1}$ из $k - 2$ звеньев так, чтобы получился выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_{i-1}C_1 \ldots C_{k-1}A_{i+2} \ldots A_n$ с $n + k - 3$ сторонами. Этот многоугольник будет разрезан на многоугольники, имеющие от 3 до $k + 3$ сторон. При этом число l многоугольников, выходящих на границу, не изменится, поскольку многоугольник, содержащий сторону B_1B_2, из граничного станет

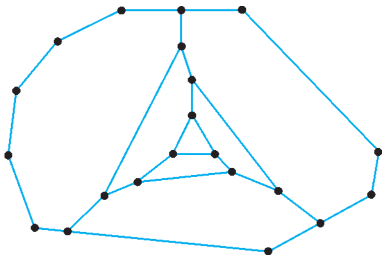


Рис. 3

внутренним. На рисунке 3 показано, как, пользуясь этим алгоритмом, получить девятиугольник, разрезанный на семь многоугольников. Однако дальше действовать так не удастся, потому что сторон, содержащих две вершины, не останется. Поэтому придется выбрать одну из сторон, содержащих одну вершину, и пристроить новый многоугольник к ней. Тогда l увеличится на 1, а число сторон многоугольника – на $k-2$. При продолжении этого процесса две стороны, содержащие вершины разбиения, будут сближаться, и в какой-то момент снова возникнет сторона, содержащая две вершины, так что на следующем шаге можно будет обойтись без увеличения l. Для $k \le 17$ можно выбирать стороны, к которым пристраивается новый многоугольник, так, чтобы эти моменты совпадали с моментами сохранения l в приведенной таблице. В результате для всех этих значений k верхняя и нижняя оценки будут совпадать. Остается ли это верным при всех k, автору неизвестно. Возможно, читатели «Кванта» смогут найти ответ на этот вопрос.

Подведем итоги

Итак, хотя решить поставленную мегазадачу нам не удалось, мы все же смогли продвинуться в этом направлении. Прежде всего, из результата задачи 1 следует, что число k многоугольников, на которые можно разрезать выпуклый n-угольник, должно лежать между 2 и некоторым зависящим от n числом $k_{\max}$. При этом предложенные нами алгоритмы позволяют оценить это число как сверху, так и снизу. Более того, для рассмотренных значений $n \le 100$ верхняя и нижняя оценки оказались равными, так что для этих значений задача решена полностью.

Приведем несколько возможных направлений дальнейшего исследования мегазадачи.

1. Предложенные алгоритмы не дают явную формулу для нижних и верхних оценок чисел n_k, а только позволяют последовательно вычислять эти оценки. Явная формула позволила бы находить оценки для данного k непосредственно.

2. Вычисляя для малых значений k верхние и нижние оценки, мы обнаружили, что соответствующие значения l во всех случаях совпадают. Это, в свою очередь, обеспечивает и совпадение самих оценок. Если совпадение значений l удастся доказать и для остальных значений k, мегазадача будет полностью решена.

Возможно, читатели смогут продвинуться в указанных направлениях или найти другие пути к окончательному решению мегазадачи.

Еще несколько задач

В заключение приведем еще несколько довольно сложных задач, близких к разобранной. Первые две взяты из статьи О.Ижболдина и Л.Курляндчика «Разрежем на треугольники» («Квант» №5 за 1996 г.), третью автор решал, будучи школьником на Московской математической олимпиаде в 1975 году, четвертая взята из Задачника «Кванта».

Задачи

2. Выпуклый многоугольник разрезан на треугольники. Докажите, что среди этих треугольников найдется хотя бы один, на границе которого нет вершин других треугольников.

3. При каких n выпуклый n-угольник может быть разрезан на треугольники так, чтобы ни у каких двух из этих треугольников не было общей стороны?

4. Существует ли выпуклый многоугольник, который можно разрезать на невыпуклые четырехугольники?

5 (М484). При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников?

Важная лемма

Д.ШВЕЦОВ

В МАТЕМАТИКЕ ПОД ЛЕММОЙ ОБЫЧНО ПОНИМАЮТ УТверждение, полезное не само по себе, а необходимое для доказательства других более важных и красивых теорем. В нашей статье речь пойдет об одной такой лемме, важность которой постараемся показать.

Теорема о средней линии известна школьникам начиная с 8-го класса, а вот утверждение, о котором речь пойдет ниже, зачастую ускользает от них.

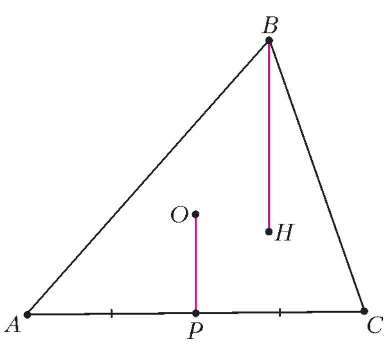


Рис. 1

Важная лемма. *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, H – его ортоцентр, P – середина стороны AC (рис. 1). Тогда*

$$BH = 2OP .$$

Доказательство. Дополним рисунок 1, а именно отметим точки K, L, M – середины отрезков AB, BH, CH соответственно (рис. 2).

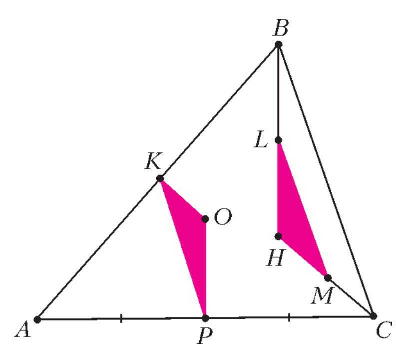


Рис. 2

Заметим, что $OK \perp AB$, так как O – точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности), но и $CH \perp AB$, поэтому $CH \parallel OK$. Аналогично убеждаемся, что $OP \parallel BH$. Далее, KP – средняя линия треугольника ABC, поэтому $KP \parallel BC$ и $KP = \frac{1}{2}BC$. А LM – средняя линия треугольника BHC, следовательно, $LM \parallel BC$ и $LM = \frac{1}{2}BC$. Получаем, что у треугольников KOP и MHL стороны попарно параллельны, следовательно, их углы попарно равны (почему?). Но $KP = \frac{1}{2}BC = LM$, т.е. $\Delta KOP = \Delta LMH$. Поэтому $OP = LH = \frac{1}{2}BH$, чем и завершается доказательство.

Оказывается, что данная конструкция изобилует параллелограммами и средними линиями. В обозначениях рисунка 2 докажите такие утверждения.

Упражнения

1. Отрезок PL равен радиусу описанной окружности треугольника ABC.

2. Точка, симметричная точке O относительно середины медианы BP, лежит на высоте треугольника ABC.

3. Пусть биссектриса угла B пересекает отрезок PL в точке N. Тогда

а) $NL = BL$;

б) $\angle HNB = 90°$.

4. Прямая PL перпендикулярна касательной, проведенной к описанной окружности треугольника ABC в точке B.

Более того, важная лемма позволяет довольно просто доказать такую известную теорему.

Теорема 1. *Ортоцентр H, центр описанной окружности O и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой (прямой Эйлера).*

Доказательство. Пусть прямая OH пересекает медиану BP в точке G (рис. 3). Заметим, что треугольники OPG и HBG подобны по двум углам. Поэтому $\frac{BG}{GP} = \frac{BH}{OP}$. По важной лемме получаем, что $\frac{BH}{OP} = 2 \Rightarrow \frac{BG}{GP} = 2$. Таким образом, получаем, что точка G лежит на медиане BP и делит ее в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому точка G является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

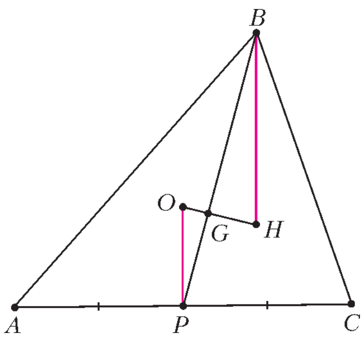


Рис. 3

Прямая Эйлера тесно связана с другой жемчужиной элементарной геометрии.

Теорема 2. *Середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.*

Эту окружность называют *окружностью девяти точек* либо *окружностью Эйлера*.

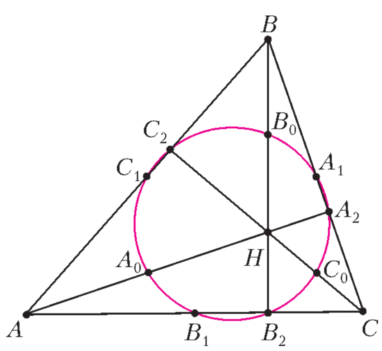


Рис. 4

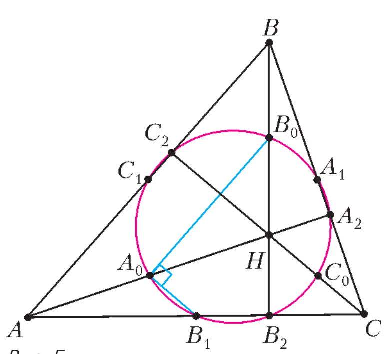


Рис. 5

На первый взгляд кажется, что такое утверждение должно доказываться очень трудно, но оказывается, что это не совсем так. Пусть A_0, A_1, A_2 – середины отрезков AH, BC и основание высоты из вершины A. Аналогично определим точки B_0, B_1, B_2 и C_0, C_1, C_2 (рис.4). Покажем, что все указанные девять точек лежат на окружности с диаметром B_0B_1. Заметим, что $\angle B_0B_2B_1 = 90°$, поэтому точка B_2 лежит на этой окружности. В треугольнике AHC отрезок A_0B_1 является средней линией, поэтому $A_0B_1 \parallel CH$ (рис. 5). В треугольнике AHB A_0B_0 – средняя линия, поэтому $A_0B_0 \parallel AB$. С другой стороны, $CH \perp AB$, следовательно, и параллельные им прямые будут взаимно перпендикулярны, т.е. $\angle B_1A_0B_0 = 90°$, а значит, точка A_0 также лежит на окружности с диаметром B_0B_1.

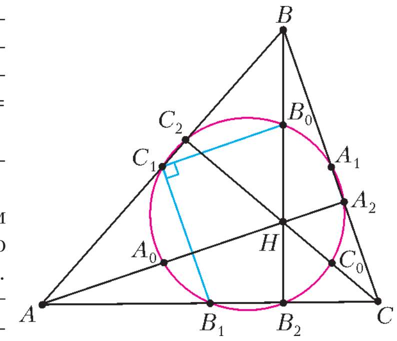


Рис. 6

Похожим образом доказывается, что $\angle B_1C_1B_0 = 90°$ (рис. 6). Действительно, C_1B_1 – средняя линия для треугольника ABC, поэтому $C_1B_1 \parallel CB$, а C_1B_0 – средняя линия для треугольника AHB, откуда заключаем, что $C_1B_0 \parallel AH$. Но $AH \perp BC$, следовательно, и $C_1B_1 \perp C_1B_0$, т.е. $\angle B_1C_1B_0 = 90°$, и, значит, точка C_1 лежит на окружности с диаметром B_0B_1.

Теперь докажем, что и $\angle B_1C_2B_0 = 90°$ (рис. 7). Заметим, что C_2B_1 – медиана прямоугольного треугольника AC_2C, проведенная к гипотенузе, поэтому $\angle B_1C_2C = \angle C_2CB_1$. Обозначим эти углы через α. Тогда из прямоугольного треугольника CB_2H найдем, что $\angle B_2HC = 90° - \alpha$, но $\angle C_2HB_0 = \angle B_2HC$ как вертикальные, т.е. $\angle C_2HB_0 = 90° - \alpha$. С другой стороны, C_2B_0 – медиана прямоугольного треугольника HC_2B, проведенная к гипотенузе BH, поэтому $\angle B_0C_2H = \angle C_2HB_0 = 90° - \alpha$. Следовательно, $\angle B_1C_2B_0 = 90°$.

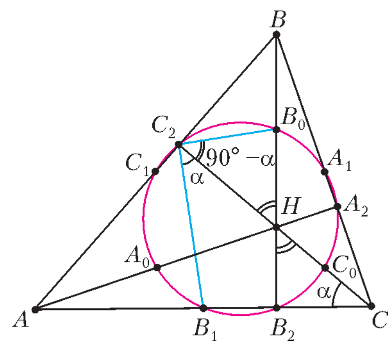


Рис. 7

Для оставшихся трех точек C_0, A_1, A_2 можно провести аналогичные рассуждения. Таким образом, мы показали, что все девять точек лежат на окружности с диаметром B_0B_1, т.е. *центром окружности девяти точек является середина отрезка* B_0B_1.

Пусть прямая OH пересекает отрезок B_0B_1 в точке O_9 (рис. 8). Заметим, что, согласно важной лемме, $OB_1 = HB_0$. С другой стороны, $\angle OO_9B_1 = \angle B_0O_9H$ (как вертикальные) и $\angle O_9OB_1 = \angle O_9HB_0$ (как накрест лежащие углы). Следовательно, $\Delta OO_9B_1 = \Delta HO_9B_0 \Rightarrow B_0O_9 = B_1O_9$. Другими словами, мы доказали, что *центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера и является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной окружности*.

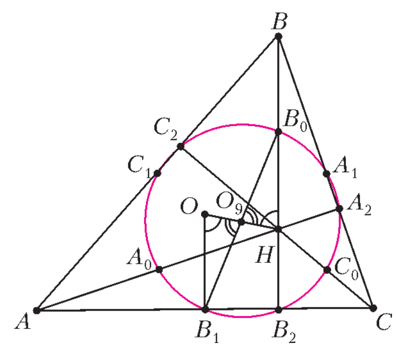


Рис. 8

Теперь посмотрим на другие любопытные следствия из важной леммы.

Задача 1. *Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть H_c – ортоцентр треугольника ABD, H_b – ортоцентр треугольника ACD. Докажите, что $BC = H_bH_c$ (рис. 9).*

На первый взгляд кажется, что задача не имеет отношения к важной лемме, но стоит отметить центр окружности (точка

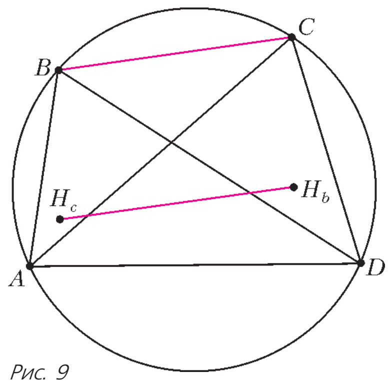


Рис. 9

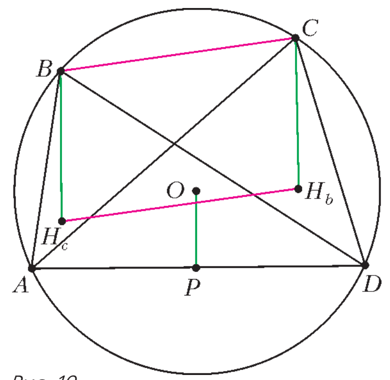


Рис. 10

O) и середину стороны *AD* (точка *P*), как сразу же все становится почти очевидным (рис. 10).

В самом деле, по важной лемме для треугольника *ABD* заключаем, что $BH_c = 2OP$. А из треугольника *ACD* опять же по важной лемме найдем, что $CH_b = 2OP$. Следовательно, $BH_c = CH_b$, но ведь $BH_c \perp AD$ и $CH_b \perp AD$, т.е. четырехугольник BCH_bH_c – параллелограмм, откуда и следует нужное нам утверждение.

Теперь определим еще и точки H_a, H_d. Тогда оказывается, что *прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в одной точке* (рис. 11).

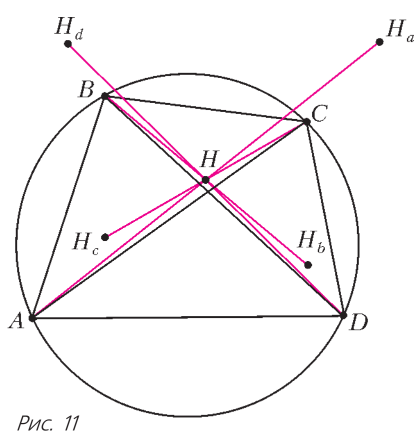


Рис. 11

Эта теорема доказывается на удивление просто. В решении задачи 1 мы доказали, что BCH_bH_c – параллелограмм, поэтому отрезки BH_b и CH_c точкой пересечения делятся пополам. Такими же рассуждениями убеждаемся, что любая пара из наших отрезков делится точкой пересечения пополам, поэтому все четыре отрезка имеют общую середину.

Точку *H* пересечения прямых будем называть *ортоцентром четырехугольника*. Таким образом, ортоцентр четырехугольника *ABCD* является серединой каждого из отрезков AH_a, BH_b, CH_c и DH_d.

Пусть *L* – середина стороны *BC* вписанного четырехугольника *ABCD* (рис. 12). Проведем прямую *LH* (*H* – ортоцентр четырехугольника). Как мы выяснили выше, *H* – середина отрезка CH_c, т.е. *LH* – средняя линия для треугольника BCH_c, откуда $LH \parallel BH_c$, но $BH_c \perp AD$, поэтому $LH \perp AD$. Другими словами, перпендикуляр, опущенный из середины *L* стороны *BC* на противоположную сторону *AD*, проходит через ортоцентр *H* этого четырехугольника. Разумеется, аналогичное утверждение верно и для середин других сторон. Получаем, что все такие прямые пересекаются в одной точке – ортоцентре четырехугольника (рис. 13).

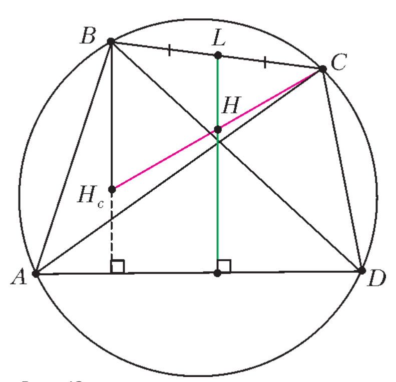


Рис. 12

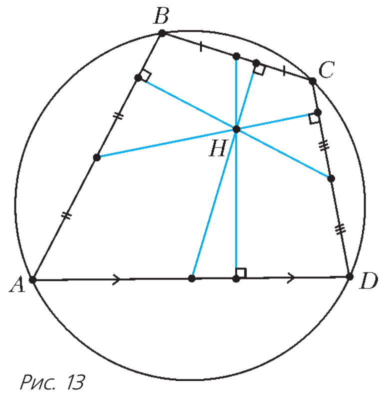


Рис. 13

Это утверждение называют *теоремой Монжа*.

Медиану четырехугольника определим как отрезок, соединяющий середины противоположных сторон. В треугольнике три медианы пересекаются в одной точке, а для четырехугольника имеется такой аналог.

Задача 2. *Пусть K, L, M, N, E, F – середины отрезков AB, BC, CD, AD, AC и BD соответственно. Тогда отрезки KM, LN, EF пересекаются в одной точке (рис. 14).*

Доказательство опять-таки использует среднюю линию треугольника. Заметим, что *KE* – средняя линия для треугольника *ABC*, поэтому $KE = \frac{1}{2}BC$ и $KE \parallel BC$. Аналогично из треугольника *BCD* найдем, что $FM = \frac{1}{2}BC$ и $FM \parallel BC$. Таким образом, получаем, что четырехугольник *KFME* – параллелограмм. Следовательно, отрезки *KM* и *EF* имеют общую середину. Аналогично можно показать, что середины отрезков *EF* и *LN* совпадают. Итак, мы показали, что три отрезка *KM*, *LN*, *EF* имеют общую середину *G*, т.е. они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

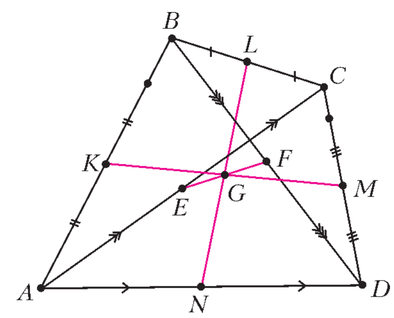


Рис. 14

Точку *G* будем называть *центроидом* четырехугольника.

Теперь все готово для доказательства следующей замечательной теоремы.

Теорема 3 (прямая Эйлера вписанного четырехугольника). *Центроид G, центр описанной окружности O и ортоцентр H вписанного четырехугольника лежат на одной прямой (рис. 15).*

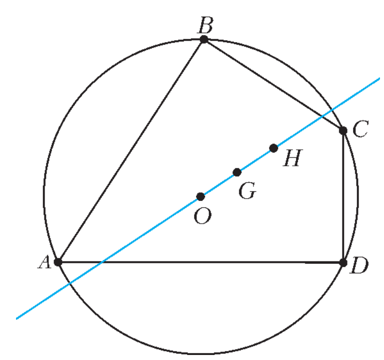


Рис. 15

Доказательство очень сходно с доказательством теоремы Монжа. В самом деле, пусть *N*, *L* – середины сторон *AD*, *BC* соответственно, а H_c – ортоцентр треугольника *ABD* (рис. 16). Как мы выяснили при доказательстве теоремы Монжа, $LH = \frac{1}{2}BH_c$ и $LH \parallel BH_c$. С другой стороны, по важной лемме для треугольника *ABD* получаем, что $BH_c = \frac{1}{2}ON$, но ведь $ON \parallel BH_c$. Следовательно, четырехугольник *OLHN* – параллелограмм, поэтому прямая *OH* содержит середину *NL*. Но чуть выше мы выяснили, что центроид *G* четырех-

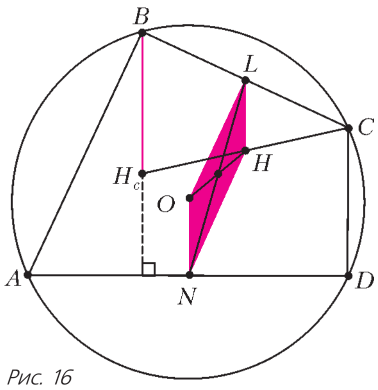


Рис. 16

угольника является серединой отрезка LN (см. рис. 15)! Откуда и следует, что точки O, G, H лежат на одной прямой. Более того, мы показали, что точка G – середина отрезка OH.

Мы обобщили прямую Эйлера, а можно ли както обобщить окружность девяти точек? Оказывается, что для вписанного четырехугольника $ABCD$ верен такой факт.

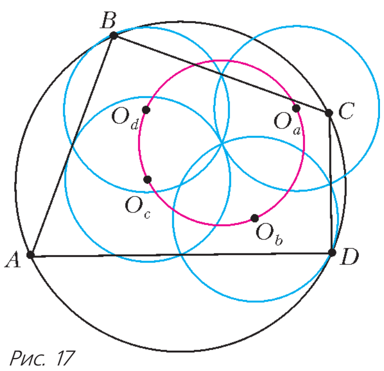


Рис. 17

Теорема 4 (окружность Эйлера вписанного четырехугольника). *Центры O_d, O_a, O_b, O_c окружностей девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB соответственно лежат на одной окружности (рис. 17).*

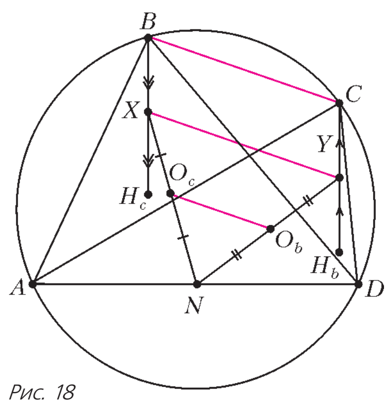


Рис. 18

Пусть H_c, H_b – ортоцентры треугольников ABD, ACD соответственно, а X, Y – середины отрезков BH_c, CH_b соответственно. Как мы выяснили выше в доказательстве окружности девяти точек для треугольника, O_c, O_b – середины отрезков XN, YN соответственно, где N – середина стороны AD (рис. 18).

Мы знаем, что BCH_bH_c – параллелограмм, тогда получаем, что XY – отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, поэтому $XY \parallel BC$. С другой стороны, в треугольнике XNY отрезок O_bO_c является средней линией, поэтому $O_cO_b \parallel XY$. Следовательно, $O_cO_b \parallel BC$, аналогичные рассуждения верны и для других пар сторон четырехугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$, т.е. получаем, что у этих четырехугольников стороны попарно параллельны, следовательно, и углы между соответствующими сторонами равны. Но раз в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$, тогда и $\angle O_b + \angle O_d = 180°$ (рис. 19). Откуда и следует вписанность четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$.

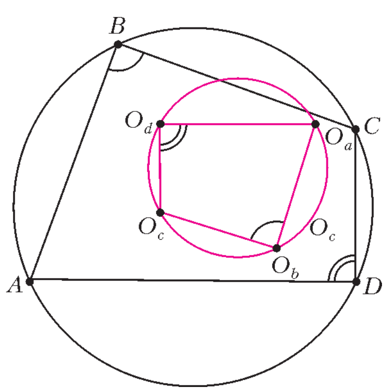


Рис. 19

Оказывается, что эти четыре окружности девяти точек пересекаются в одной точке (см. рис. 17). Согласно упражнению 1 получаем, что $XN = R = YN$, где R — радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, т.е. треугольник XNY – равнобедренный (рис. 20).

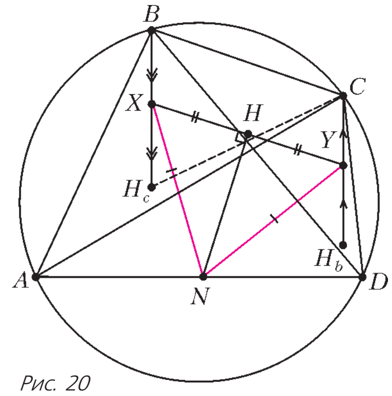


Рис. 20

С другой стороны, как мы выяснили выше, ортоцентр H четырехугольника $ABCD$ является центром (точкой пересечения диагоналей) параллелограмма BCH_bH_c. Нетрудно видеть, что отрезок XY проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма BCH_bH_c, т.е. через точку H, при этом $XH = HY$. Таким образом, NH является медианой в равнобедренном треугольнике XNY, поэтому $\angle XHN = 90°$. Следовательно, точка H лежит на окружности с диаметром XN, т.е. на окружности девяти точек треугольника ABD. Аналогично можно показать, что точка H лежит и на трех оставшихся окружностях девяти точек. Итак, мы доказали, что окружности девяти точек пересекаются в ортоцентре четырехугольника.

Но оказывается, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке для любого четырехугольника $ABCD$, а не только для вписанного!

Теорема 5. *Окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке.* [1]

Пусть K, L, M, N, E, F – середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC и BD соответственно (рис. 21). Тогда окружность девяти точек для треугольника ABD – это просто окружность, проходящая через точки K, N, F (середины сторон

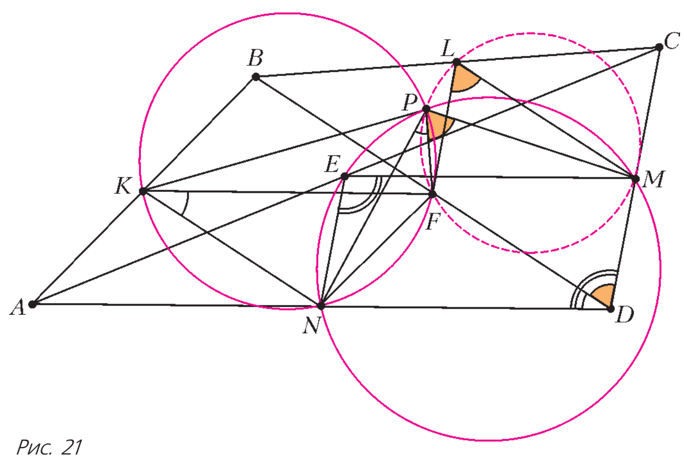


Рис. 21

этого треугольника), аналогично окружность девяти точек для треугольника ACD – окружность, описанная вокруг треугольника NEM. Пусть эти две окружности пересекаются в точке P. Заметим, что четырехугольник $KFDN$ – параллелограмм (почему?), поэтому $\angle NKF = \angle NDF$. С другой стороны, $\angle NKF = \angle NPF$, так как опираются на одну дугу NF. Получаем, что $\angle NDF = \angle NPF$. Такими же рассуждениями приходим к равенству $\angle NDM = \angle NPM$. Остается заметить, что четырехугольник $LMDF$ также является па-

[1] В 2003 году это утверждение предлагалось доказать участникам математической олимпиады Санкт-Петербурга.

раллелограммом (почему?), поэтому $\angle FLM = \angle FDM$. Из полученных равенств приходим к такой цепочке:

$$\angle FPM = \angle NPM - \angle NPF = \angle NDM - \angle NKF =$$
$$= \angle NDM - \angle NDF = \angle FDM = \angle FLM.$$

Но равенство $\angle FPM = \angle FLM$ означает, что точки F, P, L, M лежат на одной окружности, т.е. точка P лежит на окружности девяти точек треугольника BCD. Аналогично доказывается, что точка P лежит и на окружности девяти точек треугольника ABC. Таким образом, наше утверждение доказано.

Полученную точку P называют *точкой Понселе* четырехугольника $ABCD$.

После этого возникает вопрос: а можно ли обобщить прямую Эйлера на случай невписанного четырехугольника? При определении ортоцентра четырехугольника мы использовали важную лемму, т.е. то, что четырехугольник вписан, да и какой аналог центру описанной окружности можно придумать для произвольного четырехугольника? Но оказывается, что есть такое утверждение.

Теорема 6 (А. Г. Мякишев). *Пусть R – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, G – центроид четырехугольника, O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников ARD и BRC, ARB и CRD. Тогда G – середина OH.* [2]

Как мы отмечали выше, центроид G четырехугольника совпадает с серединой отрезка FE, E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно (рис. 22).

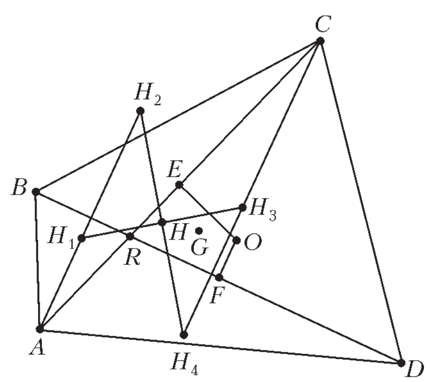


Рис. 22

Далее, пусть H_1, H_2, H_3, H_4 – ортоцентры треугольников ARB, DRA, CRD, BRC соответственно. Четырехугольник $H_1H_2H_3H_4$ является параллелограммом, так как его противоположные стороны попарно параллельны. Поэтому точка H совпадает с серединой отрезка H_2H_4. Теперь заметим, что отрезки H_2H_4 и AC заключены между параллельными прямыми AH_2 и CH_4, следовательно, прямая HE, проходящая через середины этих отрезков, параллельна прямым AH_2 и CH_4 (это следует из теоремы о средней линии). Таким образом, получаем, что $HE \parallel CH_4$, но $CH_4 \parallel OF$ (почему?), следовательно, $HE \parallel OF$. Аналогично убеждаемся, что и $HF \parallel EO$. Итак, получаем, что четырехугольник $HEOF$ – параллелограмм, а раз точка G – середина одной его диагонали EF, то она является серединой и другой его диагонали HO, что и завершает доказательство.

[2] Эта задача предлагалась в 2005 году участникам финального тура геометрической олимпиады имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC точка H_1 симметрична ортоцентру H относительно вершины C, а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB. Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC, является серединой отрезка H_1C_1.

2. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанные окружности треугольников ABC, BC_1A_1 повторно пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка AC.

3. Прямая l – касательная к окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, проведенная в точке B. Точка K – проекция ортоцентра треугольника на прямую l, а точка L – середина стороны AC. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

4. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по точке H пересечения его высот, центру O описанной окружности и прямой l, на которой лежит одна из его сторон.

5. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ – вписанный выпуклый пятиугольник, H_1 – ортоцентр треугольника $A_2A_1A_5$, M_1 – середина стороны A_3A_4, l_1 – прямая, проходящая через точки H_1 и M_1. Аналогично определим прямые l_2, l_3, l_4, l_5. Докажите, что все эти прямые l_i пересекаются в одной точке.

6. Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что расстояние между точками пересечения прямой MN с биссектрисами внешнего и внутреннего углов при вершине A равно AH.

7. Пусть A_1 – точка, симметричная точке A относительно прямой BC. Тогда прямая, проходящая через A и центр описанной окружности треугольника A_1BC, проходит через O_9 – центр окружности 9-ти точек треугольника ABC. Докажите это.

8. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC и проходящая через ортоцентр H, пересекает BC в точке D, а прямая, параллельная стороне BC и проходящая через ортоцентр, пересекает прямую BC в точке E. Точки D' и E' – основания перпендикуляров, опущенных из точек D и E на BC. Докажите, что прямая $D'E'$ пересекает описанную окружность в точках B', C', которые диаметрально противоположны точкам B и C.

9. Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры треугольников B_1C_1D, $C_1D_1A_1$, D_1A_1B, A_1B_1C и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.

10. Пусть ω_a – окружность, проходящая через середины сторон AB, AD и диагонали AC четырехугольника $ABCD$. Аналогично определяются окружности ω_b, ω_c, ω_d. Докажите, что окружности ω_a, ω_b, ω_c, ω_d пересекаются в одной точке.

11. Дан остроугольный треугольник ABC и точка P, не совпадающая с точкой пересечения его высот. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников PAB, PAC, PBC и ABC, а также окружность, проходящая через проекции точки P на стороны треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

Автор благодарен В.Ю.Протасову, а также ученикам школы №179 г. Москвы Зайцевой Юлии, Михайлову Ивану и Некрасовой Татьяне.

Пылевая буря и...

А.ПАНОВ

Вечером 26 апреля 2012 года подул сильный шквалистый ветер, и над Москвой пронеслась пыльная буря. Город накрыла туча зловещего зеленого цвета. Люди стали звонить на радио и телевидение, обмениваться сообщениями в интернете. Сотрудники МЧС, отвечая на запросы, объяснили это явление естественными причинами: наступила пора обильного цветения деревьев, и цветочная пыльца, поднятая западным ветром, заполнила воздушное пространство и окрасила все в зеленый цвет.

На следующее утро я провожал своих знакомых в аэропорт. Они улетали ранним рейсом, и мы должны были успеть к самому открытию метро. Когда мы вышли из дома, машины во дворе еще не разъехались и все они были покрыты зеленоватым налетом, оставшимся после бури. Такие же зеленые следы были видны и на асфальте.

От метро я возвращался вдоль Удальцовских прудов. Солнце всходило, но было еще скрыто за линией удаленных домов. Я увидел, что ореол вокруг восходящего солнца пронзен гигантским огненным мечом, устремленным ввысь. И тогда я достал телефон и сделал первые фотографии (рис.1). Я уже знал, что этим дело не закончится.

Действительно, когда солнце появилось, оно оказалось окружено цветными кольцами, и так было в течение всего этого дня. Когда я добрался до фотоаппарата, то с балкона сделал еще одну серию фотографий (рис.2).

Что же это за обстоятельства, превратившие мрачный вечер 26 апреля в прекрасное утро 27 апреля? Об одном мы уже говорили. Буря подняла в воздух пыльцу цветущих деревьев, преимущественно березы, и на следующий день Москва оказалась на дне километрового воздушного океана, заполненного мириадами мельчайших частиц этой пыльцы.

А теперь – о том, к чему это привело.

Солнечные столбы

Обратимся сначала к рисунку 1. Огненные столбы, возникающие при восходе и на закате солнца, хорошо известны в природе. Они имеют собственное название – *солнечные столбы*. В замечательной книге М.Миннарта «Свет и цвет в природе» образование столбов приписывается отражению солнечного света от плоских шестигранных пластинок льда – тонких правильных шестиугольных призм.

Представим себе, что мы смотрим на солнце через облако таких пластинок, висящих в воздухе горизонтально или почти горизонтально с небольшим разбросом углов наклона. Солнечные лучи, отражающиеся от нижних граней таких пластинок и попадающие в наш глаз через их боковые грани, как раз и формируют солнечный столб, расположенный над восходящим или заходящим солнцем.

Вернемся к 27 апреля. Ни о каких кристалликах льда не могло быть и речи, потому что в Москве в эти дни стояла рекордно теплая погода, около 27 градусов. Выходит, что за образование солнечного столба должна отвечать пыльца, и у частиц этой пыльцы должна быть нижняя плоская грань, обращенная к земле. Что-то не сходилось. Я-то представлял себе, что пыльца имеет округлую форму и ни о какой плоской грани не может идти речь. Это нужно было уточнить.

Я отыскал увеличенное изображение березовой пыльцы (см. http://www.marc-allergy.de/news/news-detail/article/13783/index.htm). Оказалось, что частица свежей пыльцы имеет форму шара с тремя отверстиями-устьицами, расположенными вдоль экватора (рис.3). Но по мере усыхания она превращается в треугольную пластину с четко различимыми вершинами, ребрами и плоскими гранями (рис.4; см. http://www.sciencephoto.com/media/135900/enlarge).

Так что 27 апреля воздушное пространство было заполнено треугольными частицами березовой пыльцы с преимущественно горизонтальной ориентацией. Отраженные от их граней лучи и сформировали солнечный столб. Правда, в силу малости частиц, тут скорее следует говорить о дифракции, а не об отражении. Но вывод о горизонтальном расположении сохраняется и в случае дифракции.

Пыльцевая корона

Теперь о рисунке 2. Возникновение таких цветных колец вокруг солнца или луны это тоже хорошо известное оптическое явление. Эти кольца называются *венцами*. Как описано в упомянутой книге Миннарта, венцы возникают в результате дифракции света на каплях воды или на кристалликах льда в воздухе. Миннарт пишет, что венцы хорошо развиты и их цвета чисты, если капли имеют строго одинаковый размер. И еще, чем меньше размер капель, тем больший радиус имеют кольца, образующие венцы.

Рис.1. Ореол и пыльцевой солнечный столб

Рис. 2. Пыльцевая корона

Рис.3. Шаровая частица пыльцы

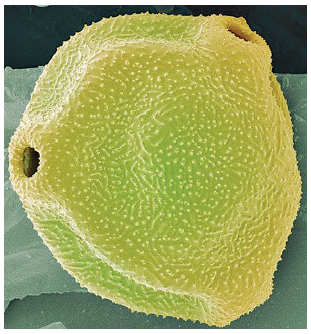


Рис.4. Треугольная частица пыльцы

Вот цитата из Миннарта: «…бывают моменты, когда они <венцы> наблюдаются и при абсолютно ясном небе. Прекрасные маленькие венцы такого рода вокруг солнца я наблюдал на Иеркской обсерватории (около Чикаго) на фоне голубого неба».

Миннарт приводит некоторое объяснение этому явлению и при этом не пишет, на какое время года приходились его наблюдения. Но если это было весной, то теперь мы бы уверенно сказали, что Миннарт видел *пыльцевую корону*. Кольца на рисунке 2 – это результат той же самой дифракции, но не на каплях, а на частицах пыльцы.

Сделаем небольшое дополнение. Если бы ориентация этих треугольных частиц пыльцы в воздушном пространстве была совершенно случайной, венцы имели бы строго круговую форму. Между тем, на рисунке 2 кольца вытянуты в вертикальном направлении Это косвенно подтверждает наше предположение о преимущественно горизонтальной ориентации этих микроскопических треугольников, которое мы сделали при обсуждении солнечного столба.

Книга М.Миннарта «Свет и цвет в природе» была издана в Голландии в 1949 году и переведена на русский язык в 1959 году. Она до сих пор является лучшим пособием по природным оптическим явлениям. Правда, в ней нет описания пыльцевой короны, так что, по-видимому, это явление стало широко известным уже после написания книги. Может быть, это связано с нынешним широким распространением аллергических заболеваний. Пыльца растений является мощным аллергеном, и сейчас повсеместно публикуются прогнозы времени и обильности цветения различных растений, а также и время их фактического цветения. Эти прогнозы используются аллергиками, их лечащими врачами и… фотографами – охотниками за пыльцевой короной.

На этом мы и закончим наш рассказ об оптических явлений 26–27 апреля 2012 года.

Что почитать, что посмотреть

Когда в следующем апреле вы попытаетесь провести наблюдение пыльцевой короны, будьте осторожны – избегайте прямого взгляда на солнце, воспользуйтесь советами, данными Миннартом на странице 270 его книги. Вот точные координаты первого издания этой книги на русском языке:

- *М.Миннарт.* Свет и цвет в природе. – М.: ФМЛ, 1959.

Сайт Лесли Коуэла http://atoptics.co.uk/ – это всеобъемлющая энциклопедия природных оптических явлений. Там в том числе рассказано о солнечных столбах (sun pillars):

- http://atoptics.co.uk/halo/pillar.htm

и о пыльцевой короне (pollen corona):

- http://atoptics.co.uk/droplets/pollen1.htm

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как сосредоточиться на бегу?

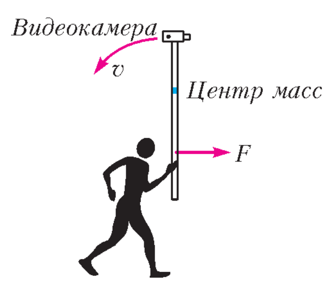
(Начало см. на 4-й странице обложки)

…Описание этого устройства было опубликовано в американском журнале «Physics Teacher» в мае 2012 года. Краткий перевод на русский язык статьи А.Бартлета с некоторыми дополнениями для нашего журнала сделал К.Богданов.

Утром 30 мая 2011 года в День Поминовения приблизительно 50 тысяч человек участвовали в десятикилометровом пробеге. Среди бегунов был замечен человек, который в правой руке вертикально держал трехметровый шест толщиной около трех сантиметров. На верхнем конце шеста высоко над головами бегущих находилась маленькая видеокамера, а к нижнему его концу были прикреплены несколько деревянных брусков. Все это сооружение, очевидно, предназначалось для видеосъемки пробега с высоты. Но при чем тут бруски, которые, казалось бы, только утяжеляют всю конструкцию?

Сначала ответим на вопрос, почему лучше снимать толпу бегунов с высоты трех метров, а не на уровне головы. Очевидно, что поднятие камеры высоко над головой увеличивает расстояние до снимаемых объектов, а значит, уменьшает относительное изменение этого расстояния, вызванное движением камеры. Поэтому объекты с большей вероятностью будут находиться в ее фокусе и в поле зрения.

Пусть бегун несет шест с видеокамерой без прикрепленных внизу брусков. При этом центр масс шеста с видеокамерой, обозначенный на рисунке синей точкой, находится выше кисти руки бегуна. Очевидно, что любые неравномерности горизонтального движения бегуна приводят к возникновению силы, действующей со стороны руки на шест в горизонтальном направлении. Если сила F направлена вправо, то она приведет к возникновению углового ускорения в системе отсчета, связанной с центром масс, а значит – к вращательному движению шеста, которое обозначено на рисунке дугообразным вектором скорости. При этом движении камера начнет снимать небо, а не участников пробега. Таким образом, неравномерности горизонтального поступательного движения, неизбежные при беге, вызовут вращательные колебания камеры в вертикальной плоскости, а толпа бегунов будет периодически исчезать и появляться в поле зрения камеры.



Прикрепим теперь к нижнему концу шеста несколько деревянных брусков так, чтобы центр масс оказался в том месте, за который бегун держит шест. В этом случае неравномерное горизонтальное движение не вызовет вращательного движения шеста и камеры, так как момент силы, приложенной к шесту со стороны бегуна, относительно центра масс всегда будет равен нулю. В результате, из поля зрения камеры толпа бегунов исчезать не будет.

Заключительный этап XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

В 2012 году заключительный этап Всероссийской математической олимпиады проходил с 23 по 28 апреля в Смоленске. Организатором олимпиады выступил Смоленский государственный университет.

В олимпиаде приняли участие юные математики, представляющие практически все регионы России. По трем параллелям (9, 10 и 11 классы) число участников составило соответственно 106, 93 и 82 школьника. Кроме команд регионов России в олимпиаде приняли участие команды Болгарии и Китая – стран, с которыми продолжается многолетнее сотрудничество и обмен делегациями.

Как обычно, в каждом из двух туров олимпиады участникам были предложены 4 задачи разной сложности и тематики. После олимпиады у школьников была возможность оценить предложенные им задачи. В этом «конкурсе красоты» призовые места получили: в параллели 9 классов задачи 8, 7 и 2, в параллели 10 классов – задачи 4, 7 и 3, в параллели 11 классов – задачи 4 и 1, а задачи 6 и 8 поделили третье место. Опрос показывает, что школьникам больше нравятся трудные и содержательные задачи, даже если они с ними не справились. Так, задачи 4 для 10 класса и 4 для 11 класса, несмотря на высокий рейтинг, не были решены на олимпиаде ни одним из участников.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ – различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Может ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012?

Н.Агаханов

2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих ее на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

Д.Храмцов

3. См. задачу М2279 «Задачника «Кванта».

4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше чем на 1.

Н.Агаханов

5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет свое мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

И.Богданов

6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C – центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

А.Полянский

7. Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске – обозначим их a и b – и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел (записанных в некотором порядке)?

Н.Агаханов

8. В некотором городе сеть автобусных маршрутов устроена так, что любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку и на каждом маршруте есть хотя бы 4 остановки. Докажите, что все остановки можно распределить между двумя компаниями так, что на каждом маршруте найдутся остановки обеих компаний.

В.Дольников

10 класс

1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ – различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Может ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012?

Н.Агаханов

2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I – центр окружности ω, а O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

Л.Емельянов

3. См. задачу М2280 «Задачника «Кванта».

4. Изначально на доске были написаны $n + 1$ одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2$, $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$, …, $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Докажите, что $m \geq 2n/(k+1)$.

А.Шаповалов

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Существуют ли натуральные числа a, b, c, большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2012?

В.Сендеров

7. См. задачу М2281 «Задачника «Кванта».

8. Точка E – середина отрезка, соединяющего точку пересечения высот неравнобедренного остроугольного треугольника ABC с его вершиной A. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что точка F, симметричная точке E относительно прямой $B'C'$, лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Л.Емельянов

11 класс

1. См. задачу М2278 «Задачника «Кванта».

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в черный и белый цвета. Затем белые клетки раскрасили в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть l – прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного l, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой l) такое, что все полученные разности не превосходят C.

И.Богданов, К.Сухов

4. См. задачу М2285 «Задачника «Кванта».

5. Даны многочлен $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такие, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что для любого действительного x выполняется равенство

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

А.Голованов, О.Дмитриев, К.Сухов

6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C – центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

А.Полянский

7. На окружности отмечены $2n + 1$ точек, делящих ее на равные дуги ($n \geq 2$). Двое по очереди стирают по одной точке. Если после хода игрока оказалось, что все треугольники с вершинами в еще отмеченных точках – тупоугольные, он немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Кто выиграет при правильной игре: начинающий игру или его противник?

Ф.Ивлев

8. Для натурального n обозначим $S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}.

Ф.Петров

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543,
Ершов Станислав – Воронеж, школа 1 с углубленным изучением отдельных предметов,
Симарова Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Креков Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»;

по 10 классам –

Воронецкий Егор – Петрозаводск, школа 42 с углубленным изучением английского языка и математики,
Баев Будимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Калмынин Александр – Иркутск, лицей-интернат 1,
Рябцева Мария – Москва, СУНЦ МГУ,
Шабанов Лев – Москва, СУНЦ МГУ,
Григорьев Михаил – Казань, лицей 131,
Ишкуватов Руслан – Казань, лицей 131,
Осипов Павел – Томск, школа 54,
Рухович Алексей – Москва, СУНЦ МГУ.

Диплом призера

по 9 классам получили

Лебедева Дарья – Санкт-Петербург, лицей 533, Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Новиков Александр – Новосибирск, гимназия 1,
Зайцева Юлия – Москва, школа 179,
Нарышкин Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Губкин Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зимин Александр – Ульяновск, школа 52,
Коротких Сергей – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Кочкин Иван – Киров, ФМЛ,
Лосев Илья – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Чернега Никита – Казань, гимназия 122,
Мелентьев Александр – Челябинск, лицей 31,
Холмогоров Ефим – Ижевск, ЭМЛ 29,
Данилюк Алексей – Екатеринбург, СУНЦ УФУ,
Гаркавый Андрей – Москва, Центр образования 218,
Зайков Александр – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Кузнецов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Волостнов Алексей – Казань, гимназия 122,
Евтушевский Всеволод – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зерцалов Андрей – Москва, Центр образования 218,
Кузнецов Арсений – Нижний Новгород, лицей 82,
Мягков Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Нигметзянова Диана – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,
Пластинин Виталий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Шигида Борис – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,
Якубов Ален – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Киселев Сергей – Омск, лицей 64,
Сотников Сергей – Санкт-Петербург, лицей 533, Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Фролов Иван – Москва, Центр образования 1329,

Замешина Мария – Челябинск, лицей 31,
Ягудин Михаил – Москва, гимназия 1543,
Гущенко-Чеверда Иван – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Милютин Петр – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Телегин Константин – Нижний Тагил, лицей,
Печатнов Юрий – Барнаул, гимназия 42,
Богданов Илья – Москва, школа 25,
Гусев Всеволод – Москва, школа 25,
Макаров Владислав – Санкт-Петербург, школа 450,
Нгуен Хюи Чыонг Нам – Москва, гимназия 1543,
Уваров Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Урусов Антон – Вологда, школа 8 с углубленным изучением отдельных предметов,
Ходунов Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Яровиков Юрий – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ;

по 10 классам –

Жевнерчук Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Голованов Александр – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,
Карпушкин Данил – Челябинск, лицей 31,
Хроменков Ярослав – Москва, СУНЦ МГУ,
Зверев Иван – Москва, СУНЦ МГУ,
Дидин Максим – Переславль-Залесский, гимназия,
Зуев Антон – Москва, СУНЦ МГУ,
Александров Никита – Набережные Челны, гимназия 26,
Шарипова Анастасия – Сочи, гимназия «Школа бизнеса» Non-State Scool of Business,
Афризонов Денис – Курган, гимназия 47,
Ковалевский Максим – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Корякин Данил – Киров, ФМЛ,
Олухов Андрей – Курган, лицей 12,
Ахтямов Павел – Магнитогорск, школа с углубленным изучением математики,
Бубнова Анна – Курган, гимназия 19,
Мельниченко Петр – Москва, школа 315,
Мокин Александр – Москва, СУНЦ МГУ,
Целищев Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Горохов Павел – Москва, СУНЦ МГУ,
Крылов Василий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Фролов Алексей – Санкт-Петербург, Академическая гимназия,
Шайхеева Талия – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,
Белов Дмитрий – Набережные Челны, гимназия 26,
Турбин Максим – Челябинск, лицей 31,
Акбаров Артур – Нижний Тагил, политехническая гимназия,
Евсюков Алексей – Владивосток, лицей «Технический»,
Крюков Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Малыгин Виталий – Киров, ФМЛ,
Уруев Андрей – Москва, СУНЦ МГУ,
Утиралова Александра – Москва, лицей «Вторая школа»,
Филиппов Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Иванов Андрей – Екатеринбург, гимназия 9,
Исхаков Ленар – Ижевск, ЭМЛ 29,
Ахмедов Максим – Москва, СУНЦ МГУ,
Клюев Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Косинов Никита – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Крохмаль Николай – Москва, СУНЦ МГУ,
Пышкин Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Хворых Павел – Омск, гимназия 84,
Матушкин Александр – Ижевск, ЭМЛ 29,
Млодик Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,
Фещенко Илья – Москва, школа 1189 им. И.В. Курчатова,
Лазарев Денис – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Ненашев Денис – Елизово, школа 8,
Южаков Александр – Курган, гимназия 31,
Симонов Кирилл – Пермь, школа 9 им. А.С.Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Соленко Никита – Тамбов, лицей 14,
Коротин Александр – Самара, медико-технический лицей,
Кравцов Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Лежнин Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Афанасьев Максим – Москва, СУНЦ МГУ,
Бесман Михаил – Курган, школа 48,
Болотников Алексей – Екатеринбург, гимназия 9,
Булгаков Артур – Казань, лицей 131,
Гальковский Егор – Санкт-Петербург, лицей 533, Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Ерошенко Александр – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Завьялов Богдан – Омск, лицей 64,
Ковальчук Михаил – Красноярск, школа 7 с углубленным изучением отдельных предметов,
Кремнёв Олег – Нижний Новгород, школа 135,
Лопатников Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Миронов Максим – Ижевск, ЭМЛ 29,
Семенов Тимофей – Иркутск, лицей 36 РЖД,
Статник Евгений – Омск, гимназия 117,
Трошин Виктор – Москва, СУНЦ МГУ.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, И.Богданов, А.Гарбер, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

Заключительный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по физике

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список победителей и призеров олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Задача 1. Поплавок в ракете

В ракете, готовой к старту, находится большой аквариум, частично заполненный водой плотностью ρ_0. Внутрь аквариума помещен тонкий цилиндрический поплавок плотностью ρ с поперечным сечением S, прикрепленный ко дну легкой пружиной жесткостью k. Перед стартом ракеты пружина растянута на x_0, а поплавок частично выступает из воды.

1) Определите, увеличится или уменьшится высота выступающей части поплавка, если система придет в движение с постоянным ускорением, направленным вверх. Ответ обоснуйте.

2) При достижении ракетой ускорения a высота выступающей над водой части поплавка изменилась на x. Найдите аналитическую зависимость x от a.

3) Рассчитайте численное значение x для следующих параметров задачи: $k = 10$ Н/м, $x_0 = 1$ см, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $S = 10^{-4}$ м^2, $g = 10$ м/с^2, $a = 3g$.

М.Замятнин

Задача 2. Пружина и шарик

На горизонтальном столе вертикально закреплена длинная гладкая труба, внутри которой установлена легкая пружина. В трубе с высоты $H = 2$ м над столом без начальной скорости начинает падать шарик. Коснувшись верхнего витка пружины шарик прилипает к нему. На рисунке 1

Рис. 1

приведен график зависимости кинетической энергии $E_к$ падающего шарика от его высоты h над поверхностью стола. Определите длину L_0 недеформированной пружины, жесткость пружины k и массу шарика m. Считайте, что потери механической энергии в момент касания шариком верхнего витка пружины не происходит и что закон Гука справедлив при любых деформациях пружины. Примите $g = 10$ м/с^2.

С.Кармазин

Задача 3. Предварительный подогрев

В лаборатории у экспериментатора Глюка были электронагреватель с мешалкой (рис.2), термостат и два тонкостенных химических стакана, линейные размеры которых отли-

На апелляции

чались в 2 раза (толщина стенок стаканов одинакова). В термостате поддерживалась постоянная температура $t_1 = 20$ °С. Глюк решил исследовать, как зависит температура жидкости в стакане от времени (мешалка нужна для быстрого выравнивания температуры по всему объему стакана). Сначала он использовал стакан меньшего размера, который заполнил исследуемой жидкостью при температуре $t_1 = 20$ °С и поместил в термостат. Включив электронагреватель, Глюк обнаружил, что за первые $\tau_1 = 10$ с система нагрелась на $\Delta t_1 = 1$ °С. Спустя продолжительное время температура жидкости установилась на отметке $t_2 = 40$ °С.

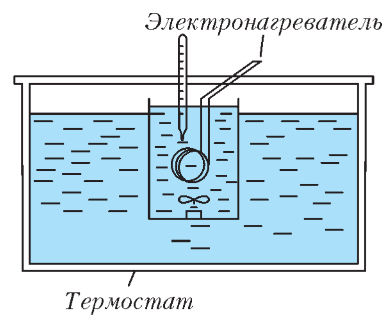


Рис. 2

Во втором эксперименте Глюк взял больший стакан, заполнил его той же жидкостью, нагретой до температуры $t_3 = 35$ °С, и включил тот же нагреватель в сеть. Через некоторое время τ_2 он с удивлением обнаружил, что температура содержимого в стакане понизилась на $\Delta t_2 = 0,5$ °С. Считая, что теплоемкость стаканов мала по сравнению с теплоемкостью содержащейся в них жидкости, найдите:

1) температуру t_4, которая установится в стакане спустя продолжительное время;

2) время τ_2.

Примечание. Известно, что поток энергии, проходящий через слой вещества (стенки стакана) в единицу времени, прямо пропорционален разнице температур на границах слоя и площади поверхности слоя.

А.Кобякин

Задача 4. Диод

Полупроводниковый диод – это устройство, которое пропускает электрический ток только в одном направлении (рис.3). Если диод включить в обратном направлении (рис.4),

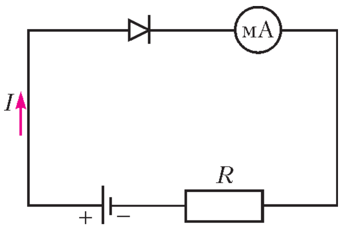


Рис. 3

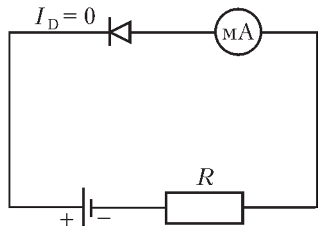


Рис. 4

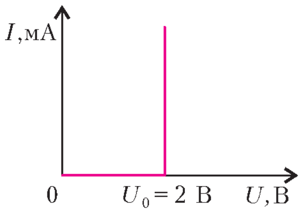


Рис. 5

ток через него течь не будет. Вольт-амперная характеристика (зависимость силы тока через диод от напряжения на диоде) идеализированного диода приведена на рисунке 5.

1) На рисунке 6 изображен фрагмент разветвленной электрической цепи. Сопротивления резисторов равны $R_1 = 6$ кОм, $R_2 = 5$ кОм. Определите падение напряжения на диоде и силу тока, протекающего через миллиамперметр.

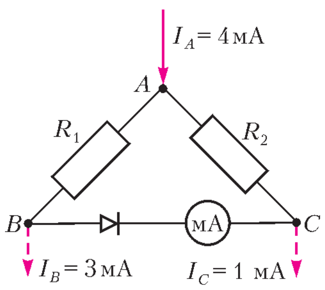


Рис. 6

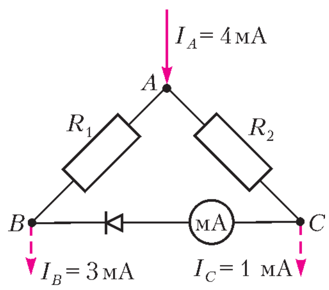


Рис. 7

2) Диод включили в цепь другой полярностью (рис.7). Сопротивления резисторов не изменились. Для этого случая определите падение напряжения на диоде и силу тока, текущего через миллиамперметр.

В обоих случаях миллиамперметр считайте идеальным.

В.Слободянин

Задача 5. Потерянное зеркало

В архиве Снеллиуса нашли чертеж, на котором когда-то были изображены два плоских зеркала M_1 и M_2, образующие двугранный угол φ, точечный источник света S и область AOB, из которой можно было видеть одновременно оба изображения источника. От времени чернила выцвели, и невозможно стало разглядеть, как расположены зеркало M_2 и точечный источник S. Восстановите по имеющимся данным (рис.8) с помощью циркуля и линейки без делений положение зеркала M_2 и геометрическое место точек, где мог находиться источник S. Зеркала считайте полубесконечными. Вычислите угол φ между плоскостями зеркал, если $\angle AOB = \alpha = 30°$.

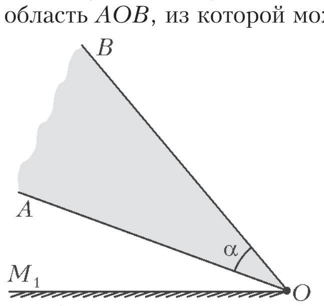


Рис. 8

В.Слободянин

10 класс

Задача 1. Платформа

На платформе с прямоугольным выступом высотой h лежит небольшое тело массой m (рис.9). К нему прикреплен один конец невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через идеальный блок, установленный на выступе платформы. Второй конец нити закреплен на вертикальной стене так, что участок нити между блоком и стеной горизонтален. Платформу перемещают от стены с постоянной скоростью v. С какой силой F нужно тянуть платформу в тот момент, когда участок нити над платформой составляет угол α с горизонтом? Сила F горизонтальна и лежит в плоскости рисунка. Коэффициент трения между телом и платформой μ, между платформой и полом трения нет. Считайте, что во время движения груз от платформы, а платформа от пола не отрываются.


Обмен впечатлениями

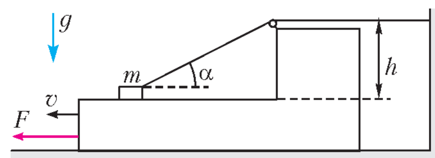


Рис.9

А.Аполонский

Задача 2. Вращающаяся трубка

Замкнутая стеклянная трубка с отводом, погруженным в открытый сверху сосуд со ртутью, в верхней своей части содержит столбик воздуха. Его границы со ртутью находятся на расстоянии R от оси симметрии системы (рис.10). Определите, с какой угловой скоростью ω нужно вращать систему вокруг этой оси, чтобы давление воздуха изменилось в n раз. Начальное давление воздуха p_0, плотность ртути ρ, ее уровень в сосуде можно считать неизменным.

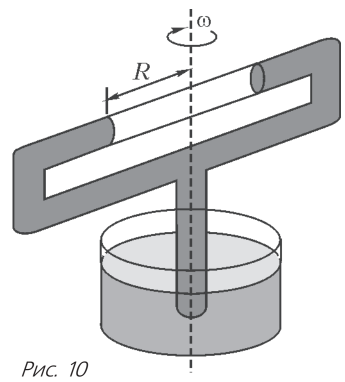


Рис. 10

И.Воробьев

Задача 3. Монотонный процесс

Один моль идеального газа переводят из состояния с известным давлением p_1 и известным объемом V_1 в состояние с давлением $0{,}75p_1$ и объемом $V_2 > V_1$. Зависимость $p(V)$ в этом процессе является линейной функцией (рис.11). При каких значениях конечного объема V_2 температура в данном процессе изменяется монотонно?

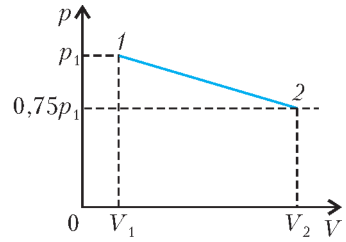


Рис. 11

С.Кармазин

Идет эксперимент

Все заняты делом

Задача 4. Разлет трех заряженных частиц

Три частицы с одинаковыми зарядами в начальный момент удерживают в вершинах треугольника со сторонами R_1, R_2 и R_3 (рис.12). Частицы одновременно отпускают, и они разлетаются так, что отрезки, соединяющие любую пару частиц, остаются параллельными исходным. Каково отношение масс этих частиц $m_1 : m_2 : m_3$? Гравитационным притяжением пренебречь.

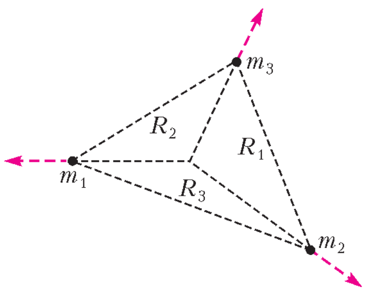


Рис. 12

И.Воробьев

Задача 5. Нелинейный элемент

К электрической цепи (рис.13), составленной из одинаковых резисторов сопротивлением R = 1 Ом каждый, нелинейного элемента с неизвестной вольт-амперной характеристикой и идеального амперметра, подключен источник, напряжение которого можно изменять. Зависимость показаний амперметра от напряжения источника задана (рис.14). Положительное направление тока указано на рисунке 13. Восстановите по этим данным вольт-амперную характеристику нелинейного элемента (зависимость силы тока через элемент от напряжения в нем).

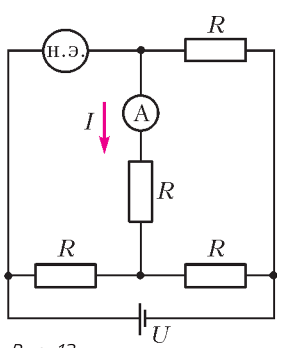


Рис. 13

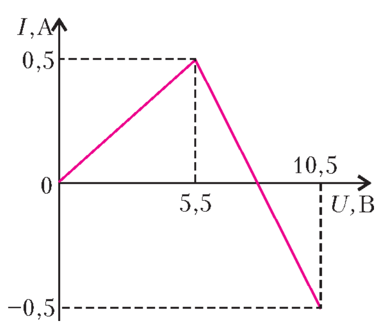


Рис. 14

А.Аполонский

11 класс

Задача 1. Пакет с мукой

Бумажный пакет с мукой падает без начальной скорости с высоты h = 4 см на чашку пружинных весов. Стрелка весов отклонилась до отметки m_1 = 6 кг, а после того, как колебания прекратились, стала показывать массу m_0 = 2 кг. Жесткость пружины k = 1,5 кН/м. Найдите массу M чашки.

Примечание. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

В.Атауллин

Задача 2. Магнетизм

По двум параллельным горизонтальным направляющим (рис.15), расположенным на расстоянии l друг от друга, могут перемещаться без трения два металлических стержня AC и DE, имеющие массу m и электрическое сопротивление R каждый. Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости направляющих. В начальный момент времени стержни расположены на расстоянии d, друг от друга и перпендикулярны направляющим. Стержень DE неподвижен, а стержню AC сообщена скорость v_0, параллельная направляющим, в направлении от DE.

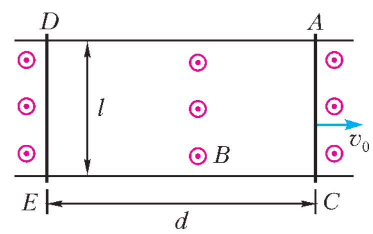


Рис. 15

1) На каком расстоянии друг от друга будут находиться стержни через большой промежуток времени?

2) Сколько тепла выделится в этой системе через большой промежуток времени?

Сопротивлением направляющих можно пренебречь.

А.Аполонский

Задача 3. Диполь в электрическом поле

Диполь представляет собой два точечных заряда $+q$ и $-q$, закрепленных на расстоянии l друг от друга. Масса диполя m. Диполь ориентирован вдоль оси x и влетает со скоростью v_0 в область длиной $2L \gg l$ (рис.16). В этой области вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ везде направлен вдоль оси x, а его модуль изменяется по закону $E(x) = E_0\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$. Найдите зависимость силы F, действующей на диполь, от его координаты x, максимальную скорость

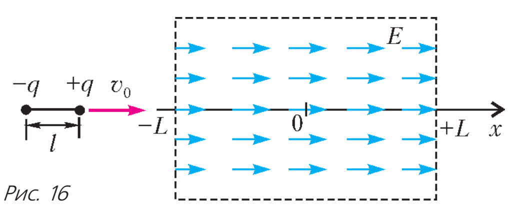


Рис. 16

диполя, а также время пролета области $2L$. Считайте, что ориентация диполя в пространстве не меняется.

Примечание. Такое электрическое поле можно создать между пластинами плоского конденсатора с помощью распределенного объемного заряда.

М.Проскурин

Задача 4. Линейный процесс

Один моль идеального многоатомного газа переводят из состояния B, в котором температура равна $t_B = 217\ ^\circ\mathrm{C}$, в состояние D так, что давление линейно зависит от объема, температура монотонно убывает, а к газу на протяжении всего процесса подводят тепло (рис.17). Найдите максимально возможную работу $A_{\max}$, которую может совершить этот газ в таком процессе.

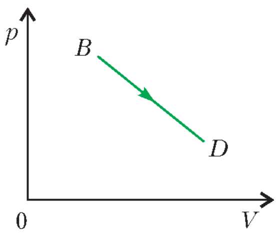


Рис. 17

В.Слободянин

Задача 5. Линзы в круг

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли рукопись, в которой обсуждалось, как может идти луч через систему из N одинаковых линз, оптические центры которых лежат на окружности, а их плоскости перпендикулярны этой окружности и проходят через ее центр. От времени чернила выцвели, и на схеме остались видны только следы от плоскостей двух соседних линз и фокус одной из них (рис.18). Из текста следовало, что луч, преломляясь в каждой из линз, идет по сторонам правильного N-угольника. Вид линзы и ее диаметр D приведены на рисунке 19.

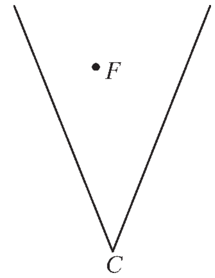


Рис. 18

1) Какие это могли быть линзы – собирающие или рассеивающие?

Построением (с помощью циркуля и линейки без делений) восстановите:

2) положение еще двух линз (слева и справа от изображенных на рисунке 18 плоскостей линз);

3) возможные положения оптических центров четырех получившихся линз;

4) возможный ход луча через эти линзы.

Ответ обоснуйте.

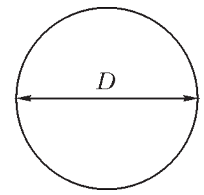


Рис. 19

И.Ерофеев, М.Осин

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Биктаиров Юрий – Москва,
Рогозин Александр – Челябинская область,
Мелентьев Александр – Челябинская область,
Пикалов Арсений – Новосибирская область,
Фадеев Артем – Ставропольский край;

по 10 классам –

Денисов Арсений – Приморский край,
Лебедев Роман – Алтайский край,
Поздняков Сергей – Москва,
Калинов Даниил – Москва;

по 11 классам –

Ивашковский Иван – Москва,
Слободсков Игорь – Московская область,
Лункин Алексей – Москва,
Сопенко Никита – Тамбовская область,
Ширкин Михаил – Московская область,
Седов Александр – Москва,
Френклах Давид – Московская область.

Диплом призера

по 9 классам получили

Иванов Артем – Москва,
Сивкин Владимир – Московская область,
Смердов Антон – Кировская область,
Петров Павел – Москва,
Агапов Семен – Московская область,
Шишкин Евгений – Пермский край,
Прокошев Никита – Пермский край,
Бугаев Сергей – Москва,
Гвоздевский Павел – Мурманская область,
Вахлов Даниил – Архангельская область,
Данилюк Алексей – Свердловская область,
Татаркин Дмитрий – Республика Мордовия,
Любайкина Наталья – Республика Мордовия,
Писаренко Анастасия – Алтайский край,
Ходунов Павел – Санкт-Петербург,
Ковалев Дмитрий – Московская область,
Федоров Илья – Камчатский край,
Красников Алексей – Республика Татарстан,
Толмачев Дмитрий – Свердловская область,
Захаров Роман – Москва,
Ломов Константин – Новосибирская область,
Лопаткин Даниил – Югра,
Ситнов Владимир – Алтайский край,
Буренев Иван – Санкт-Петербург,
Гросс Виктория – Москва,
Скрипнюк Владислав – Брянская область,
Сычев Станислав – Санкт-Петербург,
Шевченко Александр – Приморский край,
Гришин Анатолий – Республика Башкортостан,
Калинин Николай – Нижегородская область,
Шалова Анна – Ростовская область,
Иванов Айсиэн – Республика Саха (Якутия);

по 10 классам –

Великанов Максим – Свердловская область,
Вишняков Павел – Москва,
Маслов Иван – Челябинская область,
Матвеев Иван – Волгоградская область,
Фрадкин Илья – Москва,
Дидин Максим – Ярославская область,
Куренков Михаил – Нижегородская область,
Туманов Владислав – Новосибирская область,
Егоров Антон – Санкт-Петербург,
Высоких Максим – Кировская область,
Дегтяренко Антон – Приморский край,
Савищев Дмитрий – Москва,
Холин Антон – Республика Мордовия,
Кошелев Ярослав – Челябинская область,
Данько Алексей – Москва,
Малыгин Виталий – Кировская область,

Подлесный Максим – Московская область,
Ключиков Евгений – Приморский край,
Корякин Илья – Новосибирская область,
Калита Ирина – Краснодарский край,
Капцан Арсений – Челябинская область,
Бурдина Анастасия – Пермский край,
Погодаев Леонид – Москва,
Блинов Роман – Вологодская область,
Водопьян Даниил – Санкт-Петербург,
Кондратьев Артем – Республика Удмуртия,
Жабин Виктор – Алтайский край,
Мажник Ефим – Москва,
Моклев Вячеслав – Ленинградская область,
Николаев Владимир – Орловская область,
Сабденов Чингиз – Томская область,
Кот Эрик – Хабаровский край,
Лотков Анатолий – Москва,
Дмитриева Наталия – Иркутская область,
Загвоздкин Андрей – Свердловская область,
Фасалов Андрей – Челябинская область;

по 11 классам –

Млодик Михаил – Нижегородская область,
Никитин Денис – Санкт-Петербург,
Гинзбург Лев – Москва,
Гринько Дмитрий – Москва,
Синяков Лев – Москва,
Васильева Александра – Москва,
Меняйлов Михаил – Московская область,
Пучкин Никита – Нижегородская область,
Гальковский Егор – Санкт-Петербург,
Логинов Николай – Нижегородская область,
Азнауров Давид – Москва,
Дуков Андрей – Москва,
Маслов Артемий – Санкт-Петербург,
Дедович Сергей – Московская область,
Евсеев Олег – Москва,
Алексенко Владимир – Москва,
Бушмин Иван – Московская область,
Вартанян Надежда – Смоленская область,
Зыков Никита – Челябинская область,
Крошнин Алексей – Архангельская область,
Ерошенко Александр – Москва,
Попеску Андрей – Москва,
Сурдяев Алексей – Республика Мордовия,
Фещенко Илья – Москва,
Кулеш Иван – Псковская область,
Мануйлович Ева – Москва,
Приходько Иван – Москва,
Терехов Антон – Санкт-Петербург.

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Слободянин

LIII Международная математическая олимпиада

С 4 по 16 июля 2012 года в Аргентине прошла LIII Международная математическая олимпиада (ММО). Прохладной аргентинской зимой олимпиаду принимал курортный город Мар-дель-Плата, расположенный на берегу Атлантического океана. В этом году в ММО приняли участие 548 человек из 100 стран мира.

Команду России составили ребята из самых разных уголков нашей страны: выпускники школы *Михаил Григорьев* из Казани (лицей 131) и *Александр Калмынин* из Иркутска (лицей-интернат 1), десятиклассники *Дмитрий Крачун* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239), *Александр Матушкин* из Ижевска (лицей 29), *Лев Шабанов* из Ангарска Иркутской области (СУНЦ МГУ) и девятиклассник *Даниил Клюев* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239). Несмотря на то, что сборная России нынешнего года достаточно молодая (большая часть команды имеет шансы и на следующий год принять участие в ММО), каждый из ребят в рамках подготовки сборной к ММО уже участвовал хотя бы в одном из международных соревнований, а Михаил Григорьев и Дмитрий Крачун завоевали медали ММО в прошлом году. Задания нынешней олимпиады оказались весьма сложными (только 32 участника (!) сумели набрать более двух третей от возможного максимального числа баллов), особенно трудными были задачи 3 и 6. Тем не менее, наша сборная выступила успешно. Российские школьники завоевали 4 золотые и 2 серебряные медали, заняв 4 строчку в командном рейтинге.

Последний этап подготовки команды к ММО – летние учебно-тренировочные сборы – проходил, как и в предыдущие годы, в детском лагере «КОМПЬЮТЕРиЯ» (Тверская область). Большой вклад в успешное выступление команды внесли преподаватели сборов: педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга, к.ф.-м.н. *С.Л.Берлов*, младший научный сотрудник, преподаватель МГУ и МФТИ, к.ф.-м.н. *А.И.Гарбер*, педагог дополнительного образования Санкт-Петербурга *А.С.Голованов*, профессор Ярославского государственного университета, д.ф.-м.н. *В.Л.Дольников*, аспирант МГУ *А.Н.Магазинов*, аспирант МГУ *И.Митрофанов*, аспирант СПбГУ *К.А.Сухов*, аспирант ЯрГУ *Г.Р.Челноков*.

Слева направо: А.Калмынин, Л.Шабанов, Д.Крачун, А.Матушкин, Д.Клюев, М.Григорьев

Приводим результаты выступления нашей сборной (каждая задача оценивалась из 7 баллов). Полная информация о результатах на международных математических олимпиадах имеется на официальном сайте олимпиады www.imo-official.com

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Григорьев Михаил	7	7	5	7	7	0	33	золотая
Калмынин Александр	7	7	0	7	7	0	28	золотая
Клюев Даниил	7	7	7	7	7	0	35	золотая
Крачун Дмитрий	7	7	3	7	7	1	32	золотая
Матушкин Александр	7	7	3	7	1	1	26	серебряная
Шабанов Лев	7	0	3	6	0	7	23	серебряная

Руководители команды благодарят *Д.Ю.Дойхена*, который много лет оказывает поддержку команде России в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Дан треугольник ABC; точка J является центром вневписанной окружности, соответствующей вершине A. Эта вневписанная окружность касается отрезка BC в точке M, а прямых AB и AC – в точках K и L соответственно. Прямые LM и BJ пересекаются в точке F, а прямые KM и CJ пересекаются в точке G. Пусть S – точка пересечения прямых AF и BC, а T – точка пересечения прямых AG и BC. Докажите, что точка M является серединой отрезка ST.

Греция

2. Дано целое число $n \ge 3$ и действительные положительные числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ такие, что $a_2a_3\ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n > n^n.$$

Австралия

3. Два игрока A и B играют в игру «Угадай-ка». Правила этой игры зависят от двух положительных целых чисел k и n, и эти числа известны обоим игрокам.

В начале игры A выбирает целые числа x и N такие, что $1 \le x \le N$. Игрок A держит число x в секрете, а число N честно сообщает игроку B. После этого игрок B пытается получить информацию о числе x, задавая игроку A вопросы следующего типа: за один вопрос B указывает по своему усмотрению множество S, состоящее из целых положительных чисел (возможно, это множество уже было указано в одном из предыдущих вопросов), и спрашивает игрока A, принадлежит ли число x множеству S. Игрок B может задать столько вопросов, сколько он хочет. На каждый вопрос игрока B игрок A должен сразу ответить «да» или «нет», при этом ему разрешается соврать столько раз, сколько он хочет; единственное ограничение состоит в том, что из любых $k+1$ подряд идущих ответов хотя бы один ответ должен быть правдивым.

После того как B задаст столько вопросов, сколько он сочтет нужным, он должен указать множество X, содержащее не более n целых положительных чисел. Если x принадлежит множеству X, то игрок B выиграл; иначе B проиграл.

Докажите, что:

1. Если $n \ge 2^k$, то B может гарантировать себе выигрыш.
2. Для всякого достаточно большого k найдется целое число $n \ge 1{,}99^k$, при котором игрок B не сможет гарантировать себе выигрыш.

Канада

4. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что для любых целых чисел a, b, c, удовлетворяющих условию $a + b + c = 0$, выполняется равенство

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Южная Африка

5. Пусть ABC – треугольник, в котором $\angle BCA = 90°$, и пусть D – основание высоты, проведенной из вершины C. Внутри отрезка CD взята точка X. Пусть K – точка, лежащая на отрезке AX такая, что $BK = BC$. Аналогично, пусть L – точка, лежащая на отрезке BX такая, что $AL = AC$. Пусть M – точка пересечения отрезков AL и BK. Докажите, что $MK = ML$.

Чехия

6. Найдите все целые положительные числа n, для которых существуют целые неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Сербия

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин

XLIII Международная физическая олимпиада

В 2012 году Международная олимпиада школьников по физике (IPhO) проходила в Эстонии с 15 по 23 июля. В олимпиаде приняли участие школьники из 81 страны.

Россию на олимпиаде представляли *Никита Сопенко* (Тамбовская область), *Лев Гинзбург* (Хабаровск), *Иван Ивашковский* (Москва), *Александра Васильева* (Москва) и *Давид Френклах* (Долгопрудный Московской обл.).

Эти ребята прошли долгий путь отбора и подготовки к Международной олимпиаде. В апреле 2011 года по результатам заключительного этапа Всероссийской олимпиады по физике 2011 года были отобраны 24 десятиклассника, которые стали кандидатами в Национальную сборную России. Для них были проведены три двухнедельных сбора, во время которых с ребятами занимались ведущие преподаватели физики МФТИ, научные сотрудники ИТЭФ, ЦАГИ. По результатам сборов, а также с учетом результатов заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике 2012 года были отобраны пятеро ребят, которые и поехали на олимпиаду.

Важным элементами подготовки сборной стало участие наших кандидатов в Европейской олимпиаде по физике в Румынии (Бухарест, март 2012 г.) и в Азиатской олимпиаде школьников по физике (Нью-Дели, май 2012 г.). На обеих олимпиадах наши ребята выступили достаточно успешно. В

Команда России на XLIII Международной физической олимпиаде

частности, на Азиатской олимпиаде команда России заняла второе место, уступив только КНР.

Но, вернемся к олимпиаде в Эстонии. Как обычно, соревнования участников проводились в два тура – теоретический и экспериментальный. Члены сборной России получили 3 золотые и 2 серебряные медали: Никита Сопенко – золотую, Лев Гинзбург – золотую, Иван Ивашковский – золотую, Александра Васильева – серебряную и Давид Френклах – серебряную.

Абсолютным победителем олимпиады стал Аттила Сабо – школьник из Венгрии.

В неофициальном командном зачете первые 10 мест распределились следующим образом:

1. КНР
2. Тайвань
3. Россия
4. Южная Корея
5. Индия
6. США
7. Таиланд
8. Сингапур
9. Япония
10. Гонконг

В церемонии закрытия олимпиады принял участие лауреат Нобелевской премии по химии 1996 года Гаролд Крото из США (Нобелевскую премию, совместно с Р.Керлом и Р.Смелли, он получил за открытие фуллеренов).

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Рисунки прежде всего (13 баллов)

Часть А. Баллистика

Мячик, брошенный с начальной скоростью v_0, движется в однородном гравитационном поле в плоскости xz, где ось x горизонтальна, а ось z – вертикальна и антипараллельна ускорению свободного падения g; сопротивлением воздуха пренебречь.

1. Меняя угол броска мячика, брошенного с начальной скоростью v_0 из начала координат, можно поразить цель в области, заданной уравнением

$$z \le z_0 - kx^2 ;$$

этот факт можно принять без доказательства. Найдите постоянные z_0 и k. (0,8 балла)

2. Теперь можно менять и угол, и точку броска (которая все же остается на уровне земли, т.е. $z = 0$). Необходимо поразить самую верхнюю точку сферического здания радиусом R (рис.1), бросив мячик с наименьшей возможной скоростью v_0. До поражения цели отскоки мячика от здания не допускаются. Нарисуйте качественно (т.е. учитывая самые важные свойства решения, но не с абсолютной точностью) оптимальную траекторию мячика. (1,2 балла)

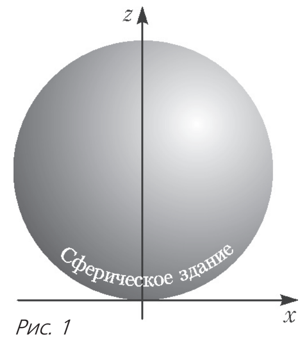


Рис. 1

Внимание! Баллы даются только за рисунок.

3. Чему равна наименьшая возможная начальная скорость $v_{\min}$, необходимая, чтобы поразить самую верхнюю точку сферического здания радиусом R? (2,5 балла)

Часть Б. Поток воздуха вокруг крыла

Для этой части задачи вам может пригодиться следующая информация. Для потока жидкости или газа при скоростях, много меньших скорости звука, вдоль линии тока справедливо следующее равенство:

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} .$$

Здесь ρ – плотность, h – высота, g – ускорение свободного падения, p – гидростатическое давление. Линиями тока называются траектории частиц жидкости или газа в случае стационарного течения. Величину $\frac{\rho v^2}{2}$ называют динамическим давлением.

На рисунке 2 приведено поперечное сечение крыла самолета, изображенное вместе с линиями тока воздуха вокруг

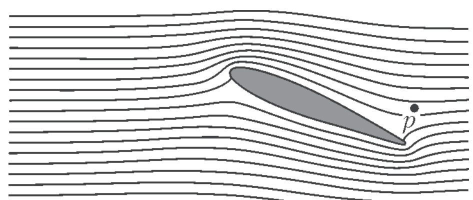


Рис. 2

крыла, увиденными в системе отсчета, связанной с крылом. Предполагайте, что: а) поток воздуха полностью двумерный (т.е. векторы скорости частиц воздуха лежат в плоскости рисунка); б) рисунок линий тока не зависит от скорости самолета; в) ветра нет; г) динамическое давление гораздо меньше атмосферного давления $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Разрешается использовать линейку, чтобы снять необходимые измерения с рисунка.

1. Если скорость самолета равна $v_0 = 100$ м/с относительно земли, то чему равна скорость воздуха v_P в точке P (см. рис.2) относительно земли? (0,8 балла)

2. В случае высокой относительной влажности воздуха при превышении самолетом критического значения скорости $v_{\text{кр}}$ за крылом возникает поток капель воды. Капли образуются в определенной точке Q. Отметьте точку Q на рисунке. Поясните качественно (используя формулы и минимальное количество текста), как вы определили ее местонахождение. (1,2 балла)

3. Оцените критическую скорость $v_{\text{кр}}$, используя следующие данные: относительная влажность невозмущенного воздуха $\varphi = 90\%$, удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 1{,}00 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), давление насыщенного водяного пара равно $p_{н1} = 2{,}31$ кПа при температуре невозмущенного воздуха $T_1 = 293$ К и $p_{н2} = 2{,}46$ кПа при температуре $T_2 = 294$ К. В зависимости от ваших приближений вам может также понадобиться удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_V = 0{,}717 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Относительная влажность является отношением давления водяного пара к давлению насыщенного водяного пара при той же температуре. (2,0 балла)

Часть В. Магнитные соломинки

Рассмотрим цилиндрическую трубку из сверхпроводящего материала (рис.3). Длина трубки l, а ее внутренний радиус r, причем $l \gg r$. Центр трубки совпадает с началом координат, а ее ось – с осью z. Имеется магнитный поток Φ через центральное поперечное сечение трубки, $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$. Сверхпроводник – вещество, полностью выталкивающее магнитное поле (магнитное поле в его толще всегда равно нулю).

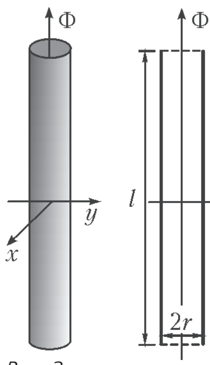


Рис. 3

1. Нарисуйте пять силовых линий магнитного поля, проходящих через пять отмеченных точек в плоскости продольного (осевого) поперечного сечения трубки. (0,8 балла)

2. Найдите направленную вдоль оси z силу натяжения T в середине трубки (т.е. силу, с которой две половины цилиндра, $z > 0$ и $z < 0$, взаимодействуют друг с другом). (1,2 балла)

3. Теперь в наличии имеется еще одна трубка, идентичная и параллельная первой (рис.4). Магнитное поле во второй трубке имеет противоположное направление, а ее центр расположен в точке $y = l$, $x = z = 0$ (таким образом, трубки образуют две противоположные стороны квадрата). Определите силу магнитного взаимодействия F между двумя трубками. (2,5 балла)

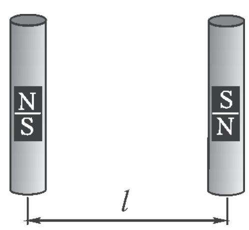


Рис. 4

Задача 2. Капельница Кельвина (8 баллов)

Вам могут пригодиться следующие сведения о поверхностном натяжении. Для молекул жидкости положение на границе с воздухом менее предпочтительно, чем в глубине. Поэтому граница обладает так называемой поверхностной энергией $U = \sigma S$, где S – площадь поверхности жидкости, а σ – коэффициент поверхностного натяжения. Кроме того, два соседних фрагмента поверхности жидкости притягивают друг друга с силой $F = \sigma l$, где l – длина прямой линии, разделяющей эти два фрагмента.

Длинная металлическая трубка с внутренним диаметром d направлена вниз, а из отверстия на ее конце медленно капает вода (рис.5). Воду можно считать проводящей. Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, а плотность ρ. На протяжении всей задачи полагайте, что $d \ll r$, где r – радиус капли, висящей непосредственно под трубкой, медленно растущей во времени до момента, когда капля отрывается от трубки и начинает падать из-за силы тяжести (ускорение свободного падения равно g).

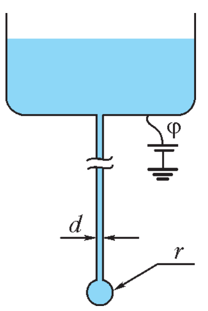


Рис. 5

Часть А. Одна трубка

1. Найдите максимальный радиус r_{max} капли непосредственно перед ее отрывом от трубки. (1,2 балла)

2. Электростатический потенциал трубки относительно бесконечно удаленной точки равен φ. Найдите заряд Q капли в момент, когда ее радиус равен r. (1,2 балла)

3. В этом подпункте полагайте, что r остается неизменным, пока φ медленно повышают. Капля станет нестабильной и распадется на капельки поменьше, если гидростатическое давление внутри капли станет меньше, чем атмосферное. Найдите критический потенциал трубки φ_{max}, при котором это случится. (1,6 балла)

Часть Б. Две трубки

Аппарат под названием «капельница Кельвина» состоит из двух трубок (идентичных трубке из части А), соединенных Т-образной трубкой (рис.6). Концы обеих трубок находятся в центре двух цилиндрических электродов длиной L и диаметром D, $L \gg D \gg r$; из обеих трубок капает n капель в единицу времени. Капли падают с высоты H в две проводящие чаши прямо под трубками, соединенные с электродами так, как показано на рисунке 6. Электроды соединены через конденсатор емкостью C. Суммарный заряд системы чаш и электродов равен нулю. Верхний контейнер с водой заземлен.

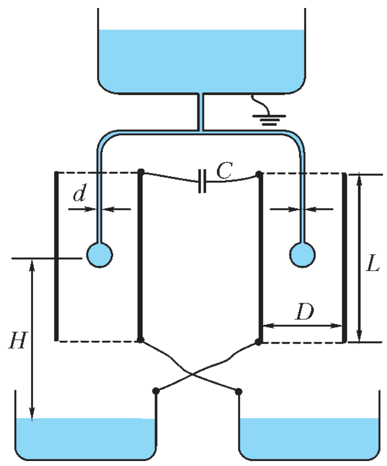


Рис. 6

1. Выразите модуль заряда Q_0 капель, отделяющихся от трубок в момент, когда заряд конденсатора равен q, через r_{max} (см. часть А-1). Эффектом, описанным в части А-3, пренебречь. (1,2 балла)

2. Найдите зависимость величины q от времени t, представив ее как непрерывную функцию от времени $q(t)$ и приняв $q(0) = q_0$. (1,5 балла)

3. Работе капельницы может помешать эффект, описанный в части А-3. Более того, существует предел U_{max} для допустимого напряжения между электродами, вызванный электростатическим отталкиванием капли и чаши под ней. Найдите U_{max}.

Примечание. Первая падающая капля имеет микроскопический заряд, что приводит к нарушению симметрии системы и небольшому разделению зарядов на конденсаторе.

Задача 3. Образование протозвезды (9 баллов)

Рассмотрим следующую модель формирования звезды. Сферическое облако разреженного межзвездного газа, находящееся изначально в состоянии покоя, начинает сжиматься из-за своей собственной гравитации. Начальный радиус облака r_0, масса m. Температура окружающей среды, гораздо более разреженной, чем газ, а также начальная температура газа всюду однаи таже и равна T_0. Газ считайте идеальным. Средняя молярная масса газа M, а его показатель адиабаты $\gamma > \frac{4}{3}$. Предполагайте, что $G\frac{mM}{r_0} \gg RT_0$, где R – универсальная газовая постоянная, а G – гравитационная постоянная.

1. На протяжении большей части сжатия газ настолько прозрачен, что все возникающее в нем тепло немедленно теряется через излучение. Во сколько раз n увеличится давление, если радиус облака уменьшится вдвое ($r_1 = 0{,}5r_0$)? Предполагайте что плотность газа остается всюду одинаковой. (0,8 балла)

2. Оцените (приблизительно) время t_2, за которое радиус облака уменьшится от r_0 до $r_2 = 0{,}95r_0$. Изменением гравитационного поля вдоль траектории частиц пренебрегите. (1 балл)

3. Предполагая, что давление газа в облаке остается пренебрежимо малым, найдите время $t_{r\to 0}$, за которое облако сожмется от радиуса r_0 до радиуса гораздо меньшего размера, используя законы Кеплера для эллиптических орбит. (2,5 балла)

4. При определенном радиусе $r_3 \ll r_0$ газ станет достаточно плотным для того, чтобы быть непрозрачным для тепловой радиации. Определите количество теплоты Q, излученное при сжатии от радиуса r_0 до радиуса r_3. (1,7 балла)

5. Для радиусов меньше чем r_3 тепловым излучением можно пренебречь. Определите, как температура T облака зависит от его радиуса $r < r_3$. (1 балл)

6. Через какое-то время пренебрегать влиянием давления на динамику газа больше нельзя, и при радиусе $r = r_4$ (где $r_4 \ll r_3$) сжатие прекращается. Однако тепловым излучением все еще можно пренебречь, а температура еще недостаточно высока, чтобы спровоцировать термоядерную реакцию. Давление в такой протозвезде больше не однородно, однако грубые оценки с неточными численными коэффициентами все еще могут быть сделаны. *Оцените* конечный радиус r_4 и соответствующую температуру T_4. (2 балла)

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Слободянин

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной набор в ВЗМШ

Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), входящая в структуру московского лицея «Вторая школа» и работающая при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в сорок девятый раз проводит набор учащихся.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, доступное для всех желающих, причем не только для школьников, пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по созданию новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2013 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, в том числе олимпиадные, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами. Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Вы сможете получать наши задания как обычной, так и электронной почтой, а также принимать участие в апробации новых интерактивных учебных программ.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради.* На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2013 года), полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали о ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Адрес ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на общешкольном сайте ВЗМШ:

www.vzmsh.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2013 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2013 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д.21/7, Северо-западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адреса филиалов математического отделения ВЗМШ:

241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru, сайт: http://cdoosh.kirov.ru

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков…

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2013 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й кус – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить и в каком классе будете учиться с 1 сентября 2013 года.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2013 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Работы можно отправлять также по электронному адресу: priem@vzmsh.org

Сайт математического отделения:

http://math.vzms.org

Задачи

1 (7–11). В соревновании участвовали 40 стрелков. Первый выбил 50 очков, второй – 70, третий – среднее арифметическое очков первых двух, четвертый – среднее арифметическое очков первых трех и т.д.: каждый следующий выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 37-й стрелок?

2 (7–10). Сколько существует трехзначных чисел с суммой цифр 8?

3 (7–10). Пусть $\overline{abc}$ – некоторое трехзначное число. Может ли число

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$$

быть полным квадратом?

4 (7–10). В вершинах нескольких одинаковых по размеру правильных картонных треугольников в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 (в каждом треугольнике встречаются все три числа). Треугольники сложили в стопку так, что их вершины совпали. Могут ли суммы чисел, написанных в каждой вершине стопки, быть равны: а) 2013; б) 2012?

5 (7–10). Сказал Кащей Бессмертный Ивану Царевичу: «Утром явишься предо мной. Я задумаю три цифры, a, b и c, а ты назовешь мне три целых числа, x, y и z. Я выслушаю тебя и скажу тебе, чему равно выражение $ax + by + cz$. После этого ты должен угадать, какие цифры a, b и c я задумал. Не угадаешь – голова с плеч. Ступай». Можно ли помочь Ивану Царевичу сохранить голову?

6 (8–10). Собранный мед заполняет несколько 50-литровых бидонов. Если его разлить в 40-литровые бидоны, то понадобится на 5 бидонов больше, но один из них останется неполным. Если собранный мед разлить в 70-литровые бидоны, то понадобится на 4 бидона меньше, но снова один из них окажется неполным. Сколько 50-литровых бидонов заполняет собранный мед?

7 (8–10). На стороне AC треугольника ABC взята точка D такая что $BD = BC$, причем $DC = 2AD$. Пусть E – точка касания окружности, вписанной в треугольник BDC, с отрезком BD. Найдите угол AED, если угол C треугольника ABC равен $40°$.

8 (8–10). Делится ли число $2^{62}+1$ на число $2^{31}+2^{16}+1$?

9 (8–10). На прямой последовательно отложены отрезки $AB = 2$, $BC = CD = 1$, $DE = 2$. Из точки M вне этой прямой все указанные отрезки видны под равными углами. Найдите эти углы.

10 (7–10). Дорога из дома до школы занимает у Ларисы 16 мин. Однажды по дороге в школу она вспомнила, что забыла дома учебник. Если она продолжит путь в школу, она придет за 2 мин до звонка, а если вернется за учебником, то придет через 6 мин после звонка (ходит она всегда с одной и той же скоростью). Какую часть пути от дома до школы прошла Лариса, когда вспомнила об учебнике?

11 (8–10). Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны центру I вписанной в треугольник ABC окружности относительно его сторон BC, AC и AB соответственно. Окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через точку A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = a$.

12 (8–10). Числа 1, 2, 3, …, 200 разбили на 50 непересекающихся групп. Всегда ли среди этих групп найдется такая, что в ней содержатся три числа, являющиеся сторонами некоторого треугольника?

Отделение биологии

Прием на биологическое отделение ведется на два потока – трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное на базе 9 классов.

Зачисление на отделение осуществляется на конкурсной основе по результатам выполнения помещенной ниже вступительной работы. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники (для сведений, взятых из интернета, – точный адрес соответствующей страницы).

Учащимся 8 классов необходимо решить задачи 1–3 и одну из задач 4, 5, а девятиклассникам – задачи 2, 3 и две из задач 4–6.

Работу следует выполнить на русском языке в тетради; на обложке укажите свою фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес с индексом, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения приемной комиссии).

Работу можно выполнить также в электронном виде и выслать в файле формата doc, docx, rtf, txt или odt на электронный адрес: uchenikivzmsh@gmail.com

Срок отправки вступительной работы – не позднее 15 июня 2013 года.

Задачи

1. Несмотря на разнообразие зверей и птиц (биологи насчитывают тысячи видов тех и других), лишь немногие из них были одомашнены человеком. Что же препятствовало одомашниванию других видов? Постарайтесь указать как можно больше причин.

2. В ряде случаев ~~в сельском~~ хозяйстве применяется высаживание так называемых сидератов – видов и пород растений, которые не идут в пищу, но так или иначе могут влиять на урожайность культур, которые будут высажены в дальнейшем. Каков может быть механизм такого влияния? В чем преимущества высаживания сидератов перед традиционным оставлением земли «под паром»? Предложите как можно больше объяснений.

3. Обычно инкубационный период заболевания – время между попаданием возбудителя в организм и появлением симптомов болезни, сопровождающихся явным ухудшением самочувствия, – составляет несколько дней. Эта ситуация представляется вполне естественной – попав в благоприятные условия, возбудитель начинает быстро размножаться и вскоре достигает такой численности, когда его воздействие на физиологические процессы в организме-хозяине становится существенным. Однако существуют и инфекционные болезни людей, для которых инкубационный период может оказаться значительно более продолжительным. Каким из известных вам болезней это свойственно? С какими причинами может быть связана такая задержка для данных болезней?

4. В спортивные секции и спортшколы берут далеко не всех претендентов – многих желающих тренеры «отбраковывают» сразу или после нескольких занятий. Какими соображениями тренеры при этом руководствуются? Конечно, ответ на этот вопрос будет зависеть от вида спорта. Поэтому рассмотрите несколько спортивных секций и дайте ответ для каждой из них.

5. Как вы понимаете – за что присудили Нобелевскую премию по биологии и медицине осенью 2012 года? Изложите своими словами суть открытия и его значение для дальнейшего развития медицины.

6. По мнению Кифы Мокиевича, существование витаминов убедительно подтверждает правоту ламарковской, а не дарвиновской теории эволюции. Ламарк без затруднений объяснил бы возникновение витаминов – стремление живых существ к прогрессу приводит к появлению у живых организмов новых, более эффективных биохимических процессов, которые, однако, не могут реализоваться из-за отсутствия какого-то нужного вещества (витамина). Впоследствии же, если повезет, животное расширит свой пищевой рацион (тоже стремясь к прогрессу), и тогда с участием витаминов произойдет «включение» уже существующего биохимического процесса. Дарвининстам же, полагает Кифа Мокиевич, придется изрядно попотеть, чтобы объяснить возникновение явно неприспособительного признака: организм почему-то переходит от самодостаточного обмена веществ к зависимости от поступления или непоступления витаминов извне. В чем, на ваш взгляд, состоит ошибка Кифы Мокиевича?

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2013 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2013 года, полный почтовый адрес (с индексом), адрес e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2013 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: olphys@polly.phys.msu.ru

Интернет-сайт: http://phys.problems.ru

Задачи

1. Катер проплыл по реке от одной пристани до другой и обратно. Известно, что его средняя скорость за первую половину времени движения оказалась на 20% выше, чем за вторую. Найдите отношение собственной скорости катера к скорости течения реки.

2. В сосуд с теплой водой опустили тело с внутренней полостью, заполненной льдом. Полость сообщается с водой в сосуде через маленькое отверстие. Тело вначале погрузилось на $5/6$ своего объема, а когда весь лед растаял, то под водой оказалось $9/10$ объема тела. Какая часть тела была исходно занята льдом?

3. Двухлитровая кастрюля с водой закипает на плите за время $t_1 = 7$ мин, если вода налита доверху, и за $t_0 = 4$ мин, если вода занимает половину объема кастрюли. Если же во втором случае положить в воду картошку так, чтобы кастрюля оказалась заполненной доверху, то кипение наступает через время $t_2 = 5$ мин 50 с. Известно, что масса картошки $m = 1{,}17$ кг, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, а ее теплоемкость $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°С). Рассчитайте по этим данным теплоемкость картошки, пренебрегая потерями тепла на испарение воды и нагревание окружающей среды. Во всех случаях мощность конфорки одна и та же, начальные температуры воды, картошки и кастрюли одинаковы.

4. Определите, сколькими способами можно составить из шести одинаковых резисторов номиналом $r = 3$ Ом эквивалентное сопротивление $R = 1$ Ом.

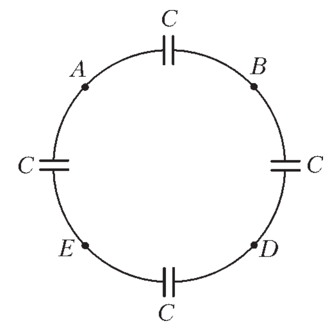
5. Точечный источник света находится на расстоянии s от экрана. Найдите, во сколько раз ярче освещен экран в ближайшей к источнику точке по сравнению с точкой, находящейся на расстоянии s от нее. Как изменится освещенность в этих точках, если параллельно экрану на расстоянии d от источника установить плоское зеркало?

6. Проволочный квадрат подвешен на нити за одну из своих вершин. В некоторый момент одна из сторон квадрата отламывается. На какой угол повернется оставшаяся часть в результате установления равновесия?

7. Жук массой m ползает по сторонам проволочного квадрата общей массой $M = 3m$, который лежит на абсолютно гладком горизонтальном столе. Постройте траекторию жука относительно стола.

8. Шарик массой M роняют на стол с высоты h без начальной скорости. Спустя время Δt из той же точки роняют второй шарик массой m ($m < M$). На какую высоту подпрыгнет второй шарик после соударения с первым? При каких значениях параметров m, M, Δt эта высота окажется максимальной и чему она будет равна? Соударения шариков друг с другом и со столом считать абсолютно упругими, размерами шариков по сравнению с величиной h пренебречь.

9. Четыре одинаковых конденсатора емкостью C каждый соединены по кругу (см. рисунок). Батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ подключают к точкам A и D. Когда конденсаторы зарядятся, батарею отсоединяют и подключают к точкам B и E. Найдите заряды, которые установятся на конденсаторах.



10. Резиновый баллон содержит $m = 2$ г воздуха и некоторое количество твердых пластиковых шариков. Известно, что объем баллона не изменится, если шарики заменить на $m_1 = 2$ г воздуха. Если же в баллон с шариками докачать $m_2 = 3$ г воздуха, то его объем увеличится на $1/3$. Такого же объема баллона можно достичь, накачивая его в отсутствие шариков. Какой при этом окажется масса воздуха в баллоне?

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о программах и порядке обучения высылаются также вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице работы укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2013 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru

Наш сайт: http://philologist.su

Вопросы

1. Предположим, что в наш язык прочно вошло слово [МУС`УК`ÓШ] и теперь подчиняется всем законам русской грамматики. Какой частью речи оно является и как пишется? (Если существительное – просклоняйте; если прилагательное – укажите начальную форму; если глагол – назовите инфинитив и перечислите все причастия, которые от этого глагола можно образовать.) А если имеются разные варианты ответа на эти вопросы, не забудьте об этом рассказать и учесть этот факт при выполнении задания.

2. Выберите два любимых вами «зимних» стихотворения русских лириков и попробуйте объяснить, какими художественными средствами рисуют они свои картины, создают настроение. Кто вам ближе и почему?

3. Коротко и внятно сформулируйте, что имели в виду авторы сочинений, и напишите, почему у них получилось смешно:

- Отец Чацкого умер в детстве.
- Вдруг Герман услыхал скрип рессор. Это была старая княгиня.
- Тарас сел на коня. Конь согнулся. А потом засмеялся.
- Пугачев пожаловал ему шубу и лошадь со своего плеча.

Отделение экономики

Хотите научиться разбираться в экономике? Узнать изнутри работу маркетологов, менеджеров, банкиров, предпринимателей? Тогда эта информация для вас!

Обучение на отделении экономики заочное, все учебные материалы школьники получают через интернет (а те, у кого нет доступа в интернет, – по почте). Учиться на экономическом отделении могут те, кто в 2013 году закончит 7–10 классов; срок обучения от 1 года до 4 лет. Обучение индивидуальное (формы учебы «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет).

Программа экономического отделения включает изучение экономической теории и знакомство с практикой экономики и бизнеса. Это может стать хорошей основой для дальнейшего изучения предпринимательства и менеджмента, бухгалтерского учета и финансов, мировой экономики – профессия экономиста требует широких знаний. Учащиеся 10–11 классов в дополнение к курсу экономики получат необходимую подготовку по русскому языку и литературе, математике, обществознанию, что поможет лучше сдать ЕГЭ, успешно участвовать в предметных олимпиадах и поступить в лучшие вузы страны.

Учась на экономическом отделении, вы сможете заочно познакомиться со студентами, выпускниками и даже преподавателями МГУ имени М.В.Ломоносова, узнаете о разнообразных замечательных профессиях в экономике, одну из которых, возможно, вы выберете для себя в будущем.

Для поступления на отделение вам нужно выполнить вступительное задание.

Прочитайте текст

В начале лета школьник Тёпа Экономов, как обычно, приехал к бабушке в деревню. Его ждали новости: бабушка недавно завела корову, которая давала удивительно вкусное и жирное молоко. В деревне теперь появились дачники, и уже не в первый раз подходили к бабуле: продай, мол, молочка. Бабушка была не прочь продать, да боялась не угадать с ценой.

Тёпа взялся разузнать, почем продают молоко. Выяснилось, что в магазине молоко 1,5%-ой жирности стоит 24 рубля за литр, 3,5%-ой жирности – 28 рублей, стерилизованное 2,5%-ой жирности – 54 рубля. Стояла там и бутылка привозного французского молока за 240 рублей.

«Нечего не понимаю...» – сказал себе Тёпа.

Постояв у прилавка, Тёпа заметил, что Марья Ивановна купила 2 литра 1,5%-го молока, тракторист Коля схватил аж 5 пакетов стерилизованного (оно может долго стоять не скисая), а соседская Юлька купила пакет 3,5%-го молока и пряников и все это с удовольствием умяла прямо около прилавка. Стало ясно, что спрос есть на всякое молоко.

Тёпа собрался высчитать назавтра среднюю цену молока, но не успел. На следующее утро к ним пришел дачник Ёлкин, взял 3 литра за сто рублей и уверил, что каждый день будет приходить и брать столько же.

Бабушка была довольна, но иногда посмеивалась над Тёпой, который видел себя в будущем великим экономистом и предпринимателем.

Задание

Помогите Тёпе разобраться: почему на один и тот же товар может быть разная цена? Что лежит в основе таких различий в ценах? Как их использовать в бизнесе? Что вы думаете о Тёпиной идее расчета средней цены молока?

Свои ответы присылайте по электронной почте: econ@vzms.ru или обычным письмом. Обязательно укажите полный почтовый адрес и индекс, фамилию, имя и отчество (в письме всю информацию о себе пишите, пожалуйста, печатными буквами). Озаглавьте письмо: «Экономика, вступительное задание-2013». Укажите класс, в котором вы сейчас учитесь. Пожалуйста, укажите источник информации, из которого вы узнали о ВЗМШ («Квант», от учителя, друзей, др.).

Срок отправки вступительной работы – до 31 мая 2013 года.

Наши адреса в интернете: http://econ4all.ru, http://vk.com/econ4all_group

Отделение истории

Отделение истории объявляет набор на курс дистантного обучения. Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом ВЗМШ. Образование в нашей школе можно продолжить, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, о чем думали, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых!

Историческое образование в конверте – современная форма дополнительного образования. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Мы же подскажем, как действовать дальше. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Как к нам поступить? Мы берем тех, кто выполнит приведенное ниже вступительное задание.

Срок отправки вступительного задания – до 15 июня 2013 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительного задания.

Задание

1. Отгадайте кто это

• С легкой руки Фридриха II в Европе его прозвали «русский Гамлет».

• О нем сплетничали, что он внебрачный сын.

• Его отец – внук Петра I по матери и внучатый племянник Карла XII по отцу.

• Его мать приехала в Россию 15-летней девочкой, пришла к власти в 33 года, свергнув мужа, и правила 34 года, не имея на трон законных прав.

• Главная черта его правления – мелочный деспотизм.

• Указом о трехдневной барщине он снискал себе ореол крестьянского царя.

• Во время военных смотров мог, осерчав, отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные букли.

• Отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, чтобы ослабить Англию, и только его смерть вернула солдат с дороги.

• Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.

• Его старший сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, исторический портрет главнокомандующего русской армией в Полтавской битве.

Для старшеклассников, готовящихся сдавать ЕГЭ по обществознанию, отделение истории объявляет набор на курс «Обществознание».

Обществознание – это свод общественных дисциплин, изучающих все стороны деятельности человека. Некоторые преподаватели называют его винегретом. Вполне удачное сравнение. Как винегрет – составное блюдо, так и обществознание состоит из разных дисциплин. Перемешиваясь, дополняя друг друга, они создают цельную картину общества.

Программа курса рассчитана на один год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ. Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика. Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 15 июня 2013 года.* В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), e-mail, класс, в котором будете учиться с 1 сентября 2013 года.

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (курс «Обществознание») или на адрес электронной почты: vzms@yandex.ru

Для школьников 7–10 классов предлагаются два спецкурса по граждановедению.

1. Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве. В этом годовом курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2. Беседы об основах демократии. Это – полуторагодовой курс.

Желающие обучаться на этих спецкурсах должны *до 15 июня 2013 года* отправить заявление. В нем укажите свой полный почтовый адрес (и адрес электронной почты, если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено (мы учитываем возраст поступающего).

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВЗМШ (граждановедение) или на адрес электронной почты: vzmsh@yandex.ru

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ работает в сфере профильного дополнительного образования детей с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 85 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик.

Научно-методическое и общее руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет).

Обучение в школе ведется по трем предметам научно-технической направленности – физике, математике и информатике. В 8–9 классах изучаются только физика и математика. В 10–11 классах к этим предметам добавляется еще предмет «Математические основы информатики и ИКТ» (информатика). Учащиеся 10–11 классов могут по своему выбору изучать либо только два предмета, а именно: физику и математику, физику и информатику или математику и информатику, либо все три предмета вместе: и физику, и математику, и информатику. Разрешается также обучение и по одному из указанных предметов.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся предметами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2013/14 учебный год проводится на заочное, очно-заочное, очное отделения.

Заочное отделение *(индивидуальное заочное обучение)*

Тел./факс: (495) 408-51-45, *e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенного ниже вступительного задания по физике и математике (для поступающих в 8–9 классы) или по выбранной совокупности предметов (для поступающих в 10–11 классы). Если школьник выбрал для изучения только один предмет, то вступительное задание выполняется им только по этому выбранному предмету. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. с 8 по 11 классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике, математике и информатике (5–6 заданий по физике и математике для 8–9 классов, 6 – 7 заданий по физике и математике и 4 – 5 заданий по информатике для 10 – 11классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправки решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2013 года.*

Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2013 года.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте по адресу:

141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ.

Школьники, уже обучающиеся в ЗФТШ, могут изменить совокупность изучаемых предметов по личному заявлению на имя директора ЗФТШ. Изменение совокупности изучаемых предметов допускается только в конце текущего учебного года, до начала следующего учебного года. Изменять совокупность изучаемых предметов в течение учебного года нельзя! Если ученик ЗФТШ хочет добавить в 10 или 11 классе к уже изучаемым предметам информатику (или заменить физику или математику на информатику), то ему не требуется выполнять вступительное задание по информатике при условии хорошей или отличной успеваемости по физике или математике за предыдущий период обучения в ЗФТШ. Если же ученик ЗФТШ хочет добавить в 10 или 11 классе к уже изучаемым предметам физику (или заменить информатику на физику или математику), то ему необходимо выполнить вступительное задание по физике или по математике в соответствии с классом обучения.

Вступительные задания по выбранным предметам ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в каждом задании. Тетрадь нужно выслать в конверте *простой* бандеролью. На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу:

Л.№																	
№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Σ
Ф																	
М																	
И																	

1. Республика, край, область	*Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Чистова Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*35*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	*лицей*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Смирнов Евгений Васильевич*
по математике	*Кочетов Петр Александрович*
по информатике	*Дронова Вера Ивановна*
7. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул. Волжская, д.74, кв.3, e-mail: dio@rdsc.ru*
8. Адрес школы и телефон, факс, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул. Циолковского, д.65, тел.: (3843)35-19-72, e-mail: must@yandex.ru*
9. Каким образом к вам попало это объявление?	

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь два одинаковых бандерольных конверта размером 160×230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение *(обучение в факультативных группах)*

Тел./факс: (498) 744-63-51, *e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя или тремя преподавателями* – физики, математики и информатики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф. И. О. полностью *с указанием класса текущего учебного года* и итоговых оценок за вступительное задание по выбранной совокупности предметов, *адрес, телефон, факс* и *e-mail школы*). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 июня 2013 года* по адресу: 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9, ЗФТШ (с пометкой «Факультатив»). Тетради с работами учащихся *не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ЗФТШ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся); приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.

Очное отделение (*обучение в вечерних консультационных пунктах)*

Тел.: (499) 755-55-80, *e-mail:* zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят в середине сентября. Обучение ведется по трем предметам (информатика – по желанию учащегося).

Программы ЗФТШ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ–2013», которая, как правило, проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. Для учащихся 9 – 11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ЗФТШ:

http://www/schol.mipt.ru

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11 классе предметам.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса может ориентировочно составлять для учащихся заочного отделения 2000 – 3000 руб. – за 2 предмета, 3600 – 4500 руб. – за 3 предмета в год, для очного отделения 3500 – 6000 руб. – за 2 предмета, 7500 – 9000 руб. – за 3 предмета в год, для очно-заочного отделения 2800 – 4400 руб. – за 2 предмета и 5700 – 6600 руб. – за 3 предмета (с каждой факультативной группы) в год.

Для учащихся Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желающим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, УЗФТШ. Тел.: 8-(10-38-044) 424-30-25, 8-(10-38-044)422-95-64. Сайт УЗФТШ: www.mfti.in.ua, e-mail:ftcsch@imp.kiev.ua

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Внимание! Прислав нам решенное вступительное задание, вы даете согласие на обработку ваших персональных данных (в соответствии с Федеральным законом от 27.07.2006 г. №152-ФЗ), которые будут использованы исключительно для отправки вам материалов по почте и учета вашей успеваемости.

Ниже приводятся вступительные задания по физике, математике и информатике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), указаны в таблице (номера классов даны на текущий 2012/13 учебный год):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Физика	1–5	6–10	8–13	11–16
Математика	1,2,3(а),4,5	5–9	3(а,б),7–10,13	3(а,б),9–14
Информатика	–	–	1–5	3–7

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

1. Гребцы на лодке стартовали от пункта *А* до пункта *Б* вниз по течению реки. Спустя $t_1 = 1$ ч они добрались до пункта *Б*. Здесь их взял на буксир катер и через время $t_2 = 1$ ч они вернулись к месту старта. Определите скорость течения реки $v_р$ и расстояние L между пунктами *А* и *Б*, если известно, что скорость лодки в стоячей воде $v_л = 10$ км/ч скорость катера в стоячей воде $v_к = 18$ км/ч. Временем, затраченным на разворот и организацию буксировки, пренебречь.

2. Для изучения «неопознанных плавающих объектов» – НПО – в озере установили неподвижный подводный микрофон. Когда был обнаружен покоящийся объект, микрофон регистрировал регулярные короткие звуковые сигналы с интервалом $\tau_1 = 1$ с. Когда НПО пришел в движение, микрофон стал регистрировать сигналы с интервалом $\tau_2 = 1{,}001$ с Определите скорость и направление движения НПО. Считать, что за все время наблюдения НПО и микрофон находились на одной и той же прямой. Во время движения объект издавал сигналы с той же периодичностью, что и в покое. Скорость звука в воде $v_{зв} = 1500$ м/с.

3. Для охлаждения нагретых стальных деталей их можно поместить в сосуд со специальным маслом. Какую максимальную массу нагретых стальных деталей можно охладить в сосуде вместимостью $V = 10$ л? Плотность масла $\rho_м = 800$ кг/м^3, плотность стали $\rho_{ст} = 7800$ кг/м^3. Известно, что для охлаждения одного килограмма стали требуется 12 кг масла при условии, что детали полностью погружены в масло. Изменением объема деталей при охлаждении и испарением масла пренебречь.

4. Два груза, первый некоторой массой m_1 и второй массой $m_2 = 2$ кг, неподвижно висят на двух легких пружинах, жесткости которых $k_1 = 100$ Н/м и $k_2 = 400$ Н/м (рис.1). Как изменится длина всей системы (расстояние от точки *А* крепления верхней пружины к опоре до точки *В* нижней пружины), если поменять местами пружины? Считайте $g = 10$ Н/кг.

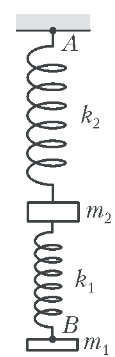


Рис. 1

5. В одинаковых сообщающихся цилиндрических сосудах с вертикальными стенками одинаковой высоты налита вода, причем ее уровень находится на $h_0 = 10$ см ниже верхнего края сосудов. При доливании в один из сосудов масла объемом $V_м = 12$ см^3 сосуд оказался заполненным маслом до самого края. Определите площадь поперечного сечения сосуда S. Плотность масла $\rho_м = 800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

6. Сплошной пробковый шар плавает в сосуде с водой, погрузившись наполовину. Если к нему прикрепить медную деталь массой $m_м = 50$ г, то он полностью уйдет под воду, не касаясь при этом стенок и дна сосуда. Определите массу пробкового шара. Плотность пробки $\rho_{пр} = 200$ кг/м^3, плотность меди $\rho_м = 8900$ кг/м^3.

7. Однородный стержень массой $m = 100$ кг и длиной $L = 3$ м нужно подвесить в горизонтальном положении на двух одинаковых тросах. При этом один трос крепится за край стержня, а второй нужно закрепить как можно ближе к середине стержня. Известно, что трос рассчитан на максимальную силу натяжения $T_{\text{макс}} = 750$ Н. На каком минимальном расстоянии от середины стержня можно закрепить второй трос? Считайте $g = 10$ Н/кг.

8. В стакан, нагретый до температуры $t_{\text{ст}} = 50$ °C и имеющий теплоемкость $C = 50$ Дж/°C, наливают $m_{\text{в}} = 100$ кг холодной воды при температуре $t_0 = 0$ °C. После установления теплового равновесия воду выливают, а стакан наполняют второй такой же порцией холодной воды. Определите установившиеся температуры t_1 и t_2 первой и второй порций воды. Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг · °C).

9. В сосуде находится $m_{\text{в}} = 200$ г теплой воды при температуре $t_{\text{в}} = 50$ °C. Какую максимальную массу льда, взятого при температуре $t_{\text{л}} = -10$ °C, можно расплавить, используя эту воду? Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг · °C) удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda_{\text{л}} = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

10. Электрический прибор подключен к сети напряжением $U = 220$ В с помощью двух длинных алюминиевых проводов длиной $l = 15$ м и сечением $S = 1$ мм^2 каждый. При этом напряжение на приборе равно $U_1 = 215$ В. Каким окажется напряжение на приборе, если алюминиевые провода заменить на медные такой же длины и той же площади поперечного сечения? Удельное сопротивление алюминия $\rho_{\text{ал}} = 0{,}26 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, удельное сопротивление меди $\rho_{\text{м}} = 0{,}17 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

11. Двигатель ракеты, взлетевшей с поверхности земли вертикально вверх, работал в течение $t_1 = 20$ с. Ракета, продолжая двигаться еще некоторое время, достигла максимальной высоты над землей $H = 1{,}5$ км. Считая движение ракеты во время работы двигателя равноускоренным, найдите величину ускорения ракеты на этом этапе движения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, считайте $g = 10$ м/с^2.

12. Теннисист отрабатывает технику удара у вертикальной стенки, находясь от нее на расстоянии $l = 15$ м. Какую минимальную скорость должен он сообщить мячу, чтобы тот после упругого удара о стенку вернулся к нему? Сопротивлением воздуха пренебречь, считайте $g = 10$ м/с^2.

13. Чтобы тянуть сани с постоянной скоростью по горизонтальной дороге, надо прикладывать силу $F_1 = 490$ Н под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту или силу $F_2 = 330$ Н под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту (рис.2). Определите по этим данным массу саней. Коэффициент трения скольжения саней о дорогу не известен, считайте $g = 10$ м/с^2.

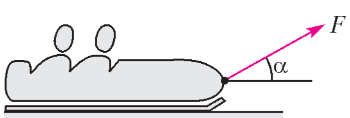


Рис. 2

14. При погружении спутника в тень Земли абсолютная температура внутри него, вначале равная $T_1 = 300$ К, упала на 1%, из-за чего давление воздуха внутри спутника понизилось на 8 мм рт. ст. Определите массу воздуха в спутнике, если его объем $V = 10$ м^3. Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

15. Моль идеального одноатомного газа переводится в тепловом процессе из начального состояния *1* в конечное состояние *4*, как указано на рисунке 3. Определите суммарное подведенное к газу количество теплоты, если разность конечной и начальной температур $\Delta T = 100$ К.

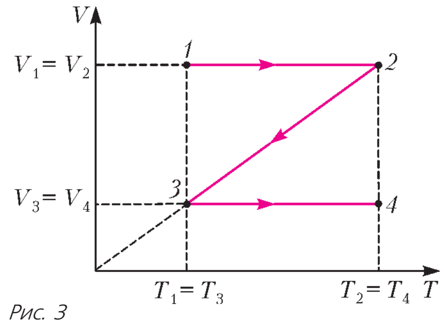


Рис. 3

16. Заряженная капля масла радиусом $r = 1{,}64$ мкм и плотностью $\rho = 851$ кг/м^3 неподвижно висит в камере, где создано электрическое поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вниз. Каковы знак и модуль заряда капли, если модуль напряженности электрического поля $E = 1{,}92 \cdot 10^5$ В/м?

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

2. До начала циркового представления продавец воздушных шаров продал 9,375% от имеющихся у него в наличии шаров. В антракте он продал $\frac{6}{23}$ оставшихся шаров, после чего у него осталось на 243 шара меньше, чем было первоначально. Сколько воздушных шаров осталось у продавца?

3. а) Отметьте на координатной плоскости точки $A(-11; 6)$, $B(5; 14)$, $C(9; 12)$, $D(9; 16)$, $E(11; 16)$, $F(11; 11)$, $G(21; 6)$, $H(14; 6)$, $K(14; -5)$, $L(-4; -5)$, $M(-4; 6)$. Соедините их последовательно отрезками (AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HK, KL, LM, MA) и найдите площадь полученной фигуры.

б) При каких значениях параметра k прямая $y = kx + 12$ не имеет с данной фигурой общих точек?

4. К числу 374 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45. Найдите все решения.

5. В 6 часов утра лодка отправилась из пункта *А* в пункт *Б* вниз по течению реки. Три часа спустя после прибытия в пункт *Б* лодка отправилась в обратный путь и прибыла в *А* в 7 часов вечера того же дня. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 5 км/ч, а расстояние между пунктами *А* и *Б* составляет 24 км.

6. Фотография размером 20×30 см вставлена в рамку прямоугольной формы постоянной ширины. Определите ширину рамки, если площадь рамки составляет 36% площади фотографии.

7. Периметр прямоугольного треугольника равен 24, а его площадь также равна 24. Найдите стороны треугольника.

8. Сократите дробь

$$\frac{3a^4 + a^3 + 6a^2 + a + 3}{3a^3 - 2a^2 + 2a - 3}.$$

9. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 2940, а наибольший общий делитель равен 7.

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(x - 1 - x^2\right)(x + 6)\left(x^2 - 6x + 5\right) \geq 0, \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 14x + 49} \geq 0, \\ x^2 - 2x - 120 < 0. \end{cases}$$

11. Решите уравнение

$$\cos^4 x + \sin^8 x = \sin^4 x + \cos^8 x .$$

12. Сумма первых 23 членов арифметической прогрессии равна 1978, а сумма первых 35 членов равна 2380. Найдите сумму первых 92 членов этой прогрессии.

13. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 17x - 11} = 4 - 5x .$$

14. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Окружность с центром на большей стороне касается двух меньших сторон треугольника. Найдите: а) радиус окружности; б) длины отрезков, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ

1. Витя пригласил своего друга Сергея в гости, но не сказал ему код от цифрового замка своего подъезда, а послал следующее SMS-сообщение: «В последовательности чисел 3, 1, 8, 2, 6 все числа больше 5 разделить на 2, а затем удалить из полученной последовательности все четные числа». Вычислите код от цифрового замка подъезда Вити.

2. На одной улице стоят в ряд 4 дома, в которых живут 4 человека: Алексей, Егор, Виктор и Михаил. Известно, что каждый из них владеет одной из следующих профессий: Токарь, Столяр, Хирург и Окулист, но неизвестно, кто какой и кто в каком доме живет. Однако известно, что:

1) Токарь живет левее Столяра
2) Хирург живет правее Окулиста
3) Окулист живет рядом со Столяром
4) Токарь живет не рядом со Столяром
5) Виктор живет правее Окулиста
6) Михаил не Токарь
7) Егор живет рядом со Столяром
8) Виктор живет левее Егора

Выясните, кто какой профессии и кто где живет.

3. Сегодня не воскресенье, а завтра не среда. Вчера была не пятница, а позавчера был не понедельник. Завтра не воскресенье и вчера было не воскресенье. Послезавтра не суббота и не воскресенье. Вчера был не понедельник и не среда. Позавчера была не среда, а завтра не вторник. Да, и сегодня не среда. Какой же сегодня день недели, если учесть, что одно утверждение в списке – ложное?

4. Строки (цепочки из чисел) создаются по следующему правилу.

Первая строка состоит из одного символа – цифры «1». Каждая из последующих цепочек создается такими действиями: в очередную строку дважды записывается предыдущая строка, а затем записывается еще одно число – номер строки по порядку.

Вот первые 4 строки, созданные по этому правилу:

(1) 1
(2) 112
(3) 1121123
(4) 112112311211234

Найдите общее количество нечетных цифр в восьмой строке.

5. Вновь назначенный директор завода решил запомнить номера телефонов начальников цехов. Рассматривая список их телефонных номеров и фамилий, он заметил, что фамилии руководителей цехов и номера их телефонов находятся в определенной взаимосвязи. И директор без труда справился со своей задачей. Вот некоторые фамилии и номера телефонов:

Бурый 5211
Ерохин 6615
Галич 5425
Дорончук 8512
Авербах 7123

Какой номер телефона имеет сотрудник по фамилии Огнев?

6. Опишите на русском языке или в виде блок-схемы алгоритм нахождения площади треугольника, если известны координаты его вершин (6 чисел).

7. В нападении на базу протоссов участвовали 150 зергов. Причем среди них было 78 зерглингов, 56 гидралисков, 37 муталисков и 15 ультралисков. Какую систему счисления используют зерги для подсчета своих войск?

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова (СУНЦ МГУ – школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 класс (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 класс (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В СУНЦ МГУ в рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс, химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школы проводится на конкурсной основе, по результатам вступительных испытаний – заочных и очных. Первый тур очных вступительных испытаний в СУНЦ МГУ будет проводиться с конца марта по начало мая 2013 года примерно в 40 регионах России.

Ниже приводятся условия задач заочного тура. Их решения можно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по любому из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ;
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ;
620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;
199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия.

При отправке по почте работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), класс, желаемый профиль обучения, домашний адрес, контактные телефоны (домашний и мобильный), электронный адрес (если имеется). В бандероль обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом.

По желанию ученика в Приемную комиссию СУНЦ МГУ работа может быть отправлена *по электронной почте*: aescpriem@gmail.com в виде файлов формата doc или pdf. В теме письма обязательно укажите – заочный тур.

Школьники, приславшие в приемную комиссию СУНЦ МГУ правильные решения хотя бы нескольких задач заочного тура по любому из предметов, будут приглашены участвовать в тренировочном Интернет-туре вступительных испытаний первого очного тура, который СУНЦ МГУ будет проводить в начале марта 2013 года. Более подробную информацию можно найти на официальном сайте СУНЦ МГУ: http://www.internat.msu.ru

Срок отправки работ заочного тура – *не позднее 23 февраля 2013 года*. Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Для поступающих в 10 класс физико-математического отделения

Задание по физике

1. При увеличении в $a = 4$ раза радиуса круговой орбиты искусственного спутника Земли период его обращения увеличивается в $b = 8$ раз. Во сколько раз изменяются скорость движения спутника по орбите и его ускорение?

2. Небольшой груз массой $m = 5$ кг подвешен к потолку лифта с помощью двух взаимно перпендикулярных легких нитей – одна длиной $l = 30$ см, другая длиной $L = 40$ см. Лифт поднимается с ускорением $a = 2\ \text{м/с}^2$. Найдите силу натяжения короткой нити.

3. На шероховатом горизонтальном столе покоится небольшой ящик массой m, к боковой грани которого прикреплена легкая пружина жесткостью k. Пружину начали плавно и крайне медленно растягивать в горизонтальном направлении, и к началу движения ящика была совершена работа A. Определите по этим данным коэффициент трения скольжения между ящиком и столом.

4. В шар массой $M = 250$ г, висящий на нити длиной $l = 50$ см, попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г. При какой минимальной скорости пули шар совершит полный оборот в вертикальной плоскости?

5. Определите минимальную массу груза, который следует положить на плоскую однородную льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду. Площадь поверхности льдины $S = 1\ \text{м}^2$, ее толщина $h = 20\ \text{см}^2$, а плотность льда $\rho = 900\ \text{кг/м}^3$.

Задание по математике

1. Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на 29, делящееся на 29 и имеющее сумму цифр 29.

2. В каком отношении делит площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, биссектриса острого угла этой трапеции?

3. Найдите все неотрицательные ($x \ge 0$, $y \ge 0$) решения уравнения

$$8xy = (x+y)\left(\sqrt{x}+1\right)(y+1).$$

4. Во вписанном в окружность четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD перпендикулярны. Найдите диаметр окружности, если $AC = a$, $BD = b$.

5. Сумма девяти различных натуральных чисел равна 200. Можно ли выбрать из них четыре числа, сумма которых не меньше 100?

Для поступающих в 11 класс физико-математического отделения

Задание по физике

1. Точка совершает прямолинейное движение вдоль оси x. Зависимость проекции ее скорости на эту ось от времени представлена на рисунке 1. Графически изобразите зависимость $x(t)$. В начальный момент точка находилась в начале координат.

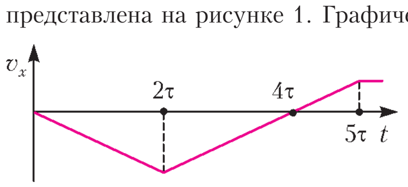


Рис. 1

2. Какую массу m балласта надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата (воздушного шара), чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $M = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг, архимедова сила постоянна и равна $F = 8$ кН

3. Открытая колба объемом $V = 1$ л находится в воздухе при нормальных условиях. Горлышко колбы имеет длину $l = 1$ см и сечение $S = 1\ \text{см}^2$. Это горлышко закрывают цилиндрической пробкой массой $m = 2$ г, могущей скользить по нему без трения. В начальный момент пробка удерживается у основания горлышка (рис.2). Воздух в колбе нагревают до температуры $t = 100\ ^\circ\text{C}$ и пробку отпускают. С какой скоростью v пробка вылетит из колбы?

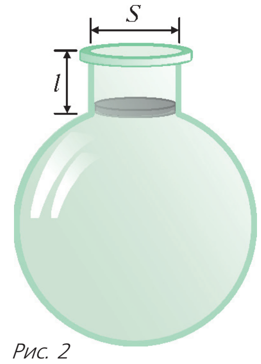


Рис. 2

4. В закрытом сосуде под давлением $p = 8 \cdot 10^4$ Па находится гелий. Его масса $m = 1$ кг, а плотность $\rho = 0{,}2\ \text{кг/м}^3$. Определите внутреннюю энергию U гелия.

5. Два одинаковых проводящих шарика, несущих равные и противоположные заряды, находятся на расстоянии $R = 2$ см друг от друга. Радиус каждого шарика $r = 1$ мм, а разность потенциалов между ними $\Delta\varphi = 100$ В. Найдите силу F их взаимного притяжения.

Задание по математике

1. Имеется 201 последовательное целое число: n, $n+1, \ldots$ $\ldots, n+200$. Известно, что сумма квадратов первых 101 числа равна сумме квадратов остальных 100 чисел. Найдите все возможные значения n.

2. Точки A', B', C' симметричны центру I вписанной в треугольник ABC окружности относительно его сторон BC, AC и AB соответственно. Окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$, проходит через точку A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = a$.

3. Найдите положительные решения ($x > 0$, $y > 0$) уравнения

$$\frac{1}{x+y} + \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

4. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах можно выбрать точки K и L так, что отрезок KL не параллелен основаниям и делится диагоналями на 3 равные части. Найдите отношение оснований AB и CD трапеции.

5. Двое играют в такую игру. Игрок A отмечает на плоскости красную точку, а игрок B в ответ отмечает на той же плоскости 50 синих точек. Игрок A стремится к тому, чтобы на плоскости оказался правильный треугольник с красными вершинами. Может ли игрок B ему помешать?

Для поступающих в 10 класс химико-биологического отделения

Задание по химии

1. Стехиометрическая смесь двух солей – нитрата калия и роданида цинка $Zn(SCN)_2$ – горит без доступа воздуха. Напишите уравнение реакции, если ее продуктами являются азот, оксид цинка, карбонат калия, сернистый и углекислый газы. Какой объем азота (н.у.) образуется при сгорании 10,0 г данной смеси?

2. Выберите из приведенного списка вещества, с которыми может реагировать вода. Если реакции возможны, напишите для них уравнения и укажите условия, при которых они могут протекать. Вещества: 1) KOH, 2) SO_3, 3) CaO, 4) Mg, 5) Fe, 6) графит.

Задание по математике

См. задание по математике для поступающих в 10 класс физико-математического отделения.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Прочитаем последнее из данных нам чисел – 31131211131221 – немного необычным способом: *одна тройка, две единицы, одна тройка, одна единица, одна двойка, три единицы, одна тройка, одна единица, две двойки, одна единица.* Запишем все озвученные цифры подряд: 13211311123113112211. Это и будет следующее число в последовательности. С тем, чтобы сформулировать само правило, трудностей у вас теперь возникнуть не должно.

2. Конечно, нет.

В тоннеле звук движущегося поезда отражается от близких стенок тоннеля и возвращается в вагон, усиливая шум. При движении по открытой местности этого не происходит, так как предметы, от которых мог бы отражаться звук, находятся далеко. Похожий эффект проявляется, когда два пассажирских поезда проезжают мимо друг друга – в вагонах сразу становится очень шумно.

3. 40 граммов.

Обозначим отношение длины левого плеча весов к правому через k. Здесь k – некоторое положительное число, которое может быть как больше, так и меньше 1.

Пусть, для определенности, при взвешивании одного пузырька аптекарь положил пузырек на левую чашку весов, а гири – на правую (если же было наоборот, просто подойдем к весам с противоположной стороны). Тогда можно записать уравнение $xk = 50$, где x – истинный вес пузырька (в граммах). При взвешивании сразу двух пузырьков аналогично получаем $2xk = 64$. Поделив второе уравнение на первое, имеем $2 = 1{,}28$.

В последнее равенство не очень верится.

В чем же дело? По-видимому, в том, что при втором взвешивании аптекарь положил пузырьки на *правую* чашку весов, а гири – на *левую*. Тогда получаем уравнение $2x = 64k$, откуда $k = 2x/64 = x/32$.

Подставив это значение в самое первое уравнение, имеем $x^2/32 = 50$, и истинный вес пузырька $x = 40$ граммов.

Примечание. Между прочим, описанная ситуация подсказывает, как найти истинный вес груза на неравноплечих весах, не производя их наладку и регулировку. Надо просто взвесить его дважды, положив груз последовательно на одну и на другую чашу весов, а затем взять *среднее геометрическое от полученных результатов.*

4. У пирата A один глаз, у $Б$ два глаза, у $В$ один глаз.

Мысленно разместим пиратов по кругу и будем говорить, что $Б$ идет после A, $В$ идет после $Б$, A идет после $В$.

Давайте предположим, что у кого-то из пиратов нет глаз, т.е. он дважды сказал правду. Тогда у следующего за ним должно быть два глаза, т.е. он дважды солгал. Следовательно, у третьего пирата не 2 глаза (иначе предыдущий сказал бы правду) и не 0 (иначе у следующего – первого – их было бы 2). Значит, у него 1 глаз, и всего в сумме набирается 3 глаза, а среди первых трех утверждений только одно верное. Тогда среди трех последних утверждений должно быть еще два верных. Но, очевидно, среди них не более одного истинного. Получается противоречие, поэтому у каждого из пиратов есть хотя бы по одному глазу.

Если у всех ровно по одному глазу, то три первых утверждения неверны и каждое из трех последних утверждений должно быть верным, что невозможно.

Итак, у кого-то есть два глаза, и он дважды солгал. У следующего за ним не может не быть глаз, так как этот случай мы уже рассмотрели. Не может быть у него и двух глаз (ведь первый солгал). Значит, у следующего один глаз. Тогда третий пират тоже одноглазый и говорит правду только однажды, а это было его высказывание о том, что у первого все глаза на месте; во второй раз он лжет. Второй пират также говорит правду однажды, но это должно быть его второе высказывание (ведь первое точно неверно). Всего в сумме набралось 4 глаза, т.е. всего 4 неверных утверждения. Среди первых трех их два, поэтому и среди последних трех их тоже два, и из них верно только утверждение пирата $В$: «У нас 4 глаза на троих». Значит, $В$ – второй пират с одним глазом, тогда $Б$ – первый пират с двумя глазами, A – третий пират с одним глазом. Легко проверить, что этот случай действительно подходит под условие задачи.

5. Прежде всего, займемся исходной задачей Кэрролла. Он решил ее весьма остроумно: раскрасил все получающиеся области попеременно в черный и белый цвета (рис.1, слева), а затем «срезал углы» (токарь сказал бы «снял фаски»). После этого осталось только обвести контур черной фигуры – и не будет ни одного пересечения (рис.1, справа).

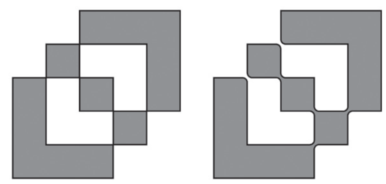


Рис. 1

А теперь «антизадача» о максимальном возможном числе пересечений. Исходная конфигурация, как видно, содержит 6 точек самопересечения, но вряд ли при рисовании мы можем добиться того, чтобы рисуемая линия пересекла себя во всех шести этих точках; назовем эти точки *узлами*. В некоторых узлах, возможно, придется «свернуть», и наша задача – минимизировать количество таких поворотов.

Исходная конфигурация есть «композиция» из трех одинаковых квадратов. Раскрасим их в три разных цвета и пронумеруем «характерные» точки, как на рисунке 2.

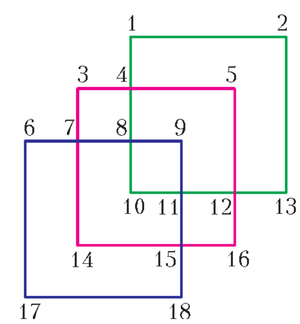


Рис. 2

Пусть мы начали рисовать с какой-то точки, и первоначально линия имела один из этих трех цветов. В процессе рисования она должна где-то поменять цвет на другой, а потом и на третий. Заметим, что замена цвета возможна только в узле, причем в таком узле пересечения не будет (ибо линия при подходе к узлу ничего не пересечет, а вынуждена будет свернуть вправо или влево от направления движения). Так что при замене первого цвета на второй хотя бы один узел окажется «непересеченным».

Далее, при замене второго цвета на третий также один узел окажется «непересеченным». Отметим, что эти два «непересеченных» узла не могут быть одним и тем же узлом, поскольку в первом из них пересекаются линии первого и второго цветов, а во втором – второго и третьего цветов.

Таким образом, по крайней мере в двух узлах пересечений не будет. А поскольку узлов всего 6, то количество пересечений не может быть больше $6 - 2 = 4$. Такое значение достигается. Вот пример, как этого добиться. Надо нарисовать ломаную в таком порядке:

17-6-7-8-9-11-15-14-7-3-4-5-12-11-10-8-4-1-2-13-12-16-15-18-17.

При этом пересечения произойдут в узлах 4, 7, 8 и 11, а без пересечений вынужденно останутся узлы 12 и 15.

ЗАДАЧИ

(см. с. 37)

1. Слева направо: Козел, Мартышка, Осел.
Сперва Мартышка сидит справа, потом – не справа и не в центре (там Осел), т.е. слева, в конце – не справа и не слева – значит, в центре. Сперва Осел сидит не справа (там Мартышка) и не в центре (он туда сядет потом), т.е. слева, потом – в центре, в конце – справа. Козлу остается последовательно центр, справа, слева.

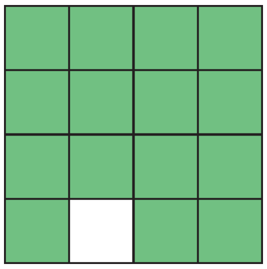


Рис. 3

2. Могло. Пример исходной фигуры изображен на рисунке 3. Можно построить и другие примеры. Для этого нужно взять какую-нибудь фигуру с четырьмя осями симметрии и убрать из нее одну клетку, не лежащую ни на одной из этих осей.

3. Может.
Например, пусть есть два человека, которые имеют по математике 5 и смотрят только мультфильмы, три человека, у которых по математике 3, а смотрят они и то и другое, и, наконец, еще два человека, у которых по математике тоже 5, но смотрят они только футбол. Тогда средний балл любой из двух групп равен

$$(5\cdot 2+3\cdot 3):5=3\frac{4}{5}<4,$$

но общий средний балл равен

$$(5\cdot 4+3\cdot 3):7=4\frac{1}{7}>4.$$

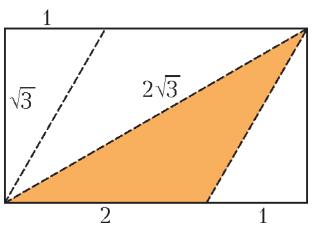


Рис. 4

4. См. рис. 4.

5. Верно.
Впишем в треугольник окружность. Отрезки, примыкающие к одной вершине, равны (как касательные, проведенные к окружности из одной точки). Поставим в каждую вершину длину соответствующего отрезка. Раз каждая сторона составлена из двух таких отрезков, то условие выполнено. Можно посчитать, что длины этих отрезков равны $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{b+c-a}{2}$ и $\frac{c+a-b}{2}$, где a, b и c – длины сторон треугольника.

Замечание. А.Шаповалов предложил трехмерный вариант этой задачи: требуется доказать, что на каждом ребре произвольного тетраэдра можно записать по неотрицательному числу так, чтобы сумма чисел на сторонах каждой грани численно равнялась ее площади. Подумайте, как в ней можно применить идеи решения «плоской» задачи.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

ЧАСТИЦЫ И ЯДРА

Вопросы и задачи

1. У молибдена.
В первом приближении ядро может считаться шаром, радиус которого пропорционален кубическому корню из атомной массы.

2. Выделилась, так как ядро перешло в состояние с меньшей энергией.

3. 25%.

4. Радиоактивный изотоп радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ возникает как промежуточный продукт распада изотопа урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$, причем скорость образования его ядер равна скорости их распада. В результате относительное содержание радия в уране со временем не меняется.

5. После пяти альфа-распадов и четырех бета-распадов.

6. Чем больше энергия альфа-частиц внутри ядра, тем больше вероятность преодоления ими потенциального барьера и тем меньше время жизни радиоактивного ядра.

7. Для современников опаснее ядра с меньшим периодом полураспада, а для их потомков – с бóльшим.

8. Ядерные силы никак не связаны с электрическими зарядами частиц, и поэтому для всех указанных пар частиц силы одинаковы.

9. Ядерные силы это не всегда силы притяжения. На расстояниях меньше $0,7\cdot 10^{-15}$ м между ядерными частицами возникают короткодействующие силы отталкивания.

10. Чем медленнее движется нейтрон, тем большее время он находится под действием сил притяжения со стороны ядра и тем легче захватывается им. Быстрый нейтрон пролетает мимо ядра за такой короткий промежуток времени, что силы притяжения не успевают отклонить его и втянуть в ядро.

11. Одновременно с бета-частицей из ядра вылетает нейтрино, и энергия между ними может распределяться различными способами.

12. Это была альфа-частица $^{4}_{2}\mathrm{He}$.

13. Нет, не может. Это запрещает закон сохранения электрического заряда.

14. Для превращения в нейтрон протон должен получить дополнительную энергию. В ядре он ее может получить от соседних частиц.

15. У протона трек толще и короче.

16. Свободных нейтронов в космическом пространстве мало, так как нейтрон нестабилен и в среднем за 900 секунд распадается на протон, электрон и антинейтрино.

17. Вселенная состоит преимущественно из легких элементов – водорода и гелия. Элементов с большим массовым числом, с которыми могут происходить реакции деления, во Вселенной очень мало.

18. В вакууме – нет, так как нарушались бы законы сохранения импульса и энергии; в процессе взаимодействия с веществом – да, благодаря передаче импульса веществу (при этом энергия каждого кванта должна превышать энергию покоя пары электрон–позитрон).

Микроопыт

Разрядка электроскопа во многом происходит из-за наличия радиоактивного фона, создаваемого источниками радиации как внутри Земли, так и в космосе. Под действием радиоактивных излучений – в том числе космических лучей, в состав которых входят протоны, электроны, альфа-частицы, нейтроны и даже ядра легких элементов, – расщепляются молекулы воздуха, что приводит к нейтрализации заряда электроскопа образовавшимися ионами.

ЧУДЕСА В КАЛЕНДАРЕ

(см. «Квант» №4)

Все делятся на 3

Между двумя днями, один из которых находится в календаре сразу под другим, проходит ровно неделя, 7 дней. Поэтому одно из этих чисел на 7 больше другого. Точно так же получаем, что число, которое находится на одну клетку ниже и левее другого, больше того на 6. А если какое-то число делится на 3 нацело, то и числа, отличающиеся от него на 6 в ту или другую сторону, тоже делятся на 3.

Суммы

• Запомним число, которое находится в середине столбца, и обратим внимание на другие числа. Число, которое располагается в клетке под средним числом, больше него на 7. То, которое на клетку выше, на 7 меньше. Значит, если сложить эти два числа, то получим удвоенное среднее число столбца. Такая же сумма будет у первого и последнего чисел в столбце. Получается, что сумма всех пяти чисел столбца в 5 раз больше числа, стоящего в середине, т.е. делится на 5.

• В столбце каждое следующее число на 7 больше предыдущего. Если сложить в столбце 4 числа подряд, из которых наименьшее равняется n, то сумма получится

$$n+(n+7)+(n+14)+(n+21)=4n+42,$$

что на 4 не делится.

• Аналогично, легко проверить, что сумма двух соседних чисел в столбце не делится на 2, а сумма трех подряд идущих чисел в столбце делится на 3. Случаи для сумм в строках и диагоналях оставляем для самостоятельного изучения.

Цифры не повторяются

С числами в строке все ясно – это семь последовательных чисел, и цифры у них не успевают повториться.

Про числа на диагонали, идущей сверху вниз в левую сторону, мы уже говорили: каждое следующее получается прибавлением 6 к предыдущему. Если бы на диагонали оказались числа с одинаковой последней цифрой, то разность этих чисел оканчивалась бы нулем. Но разность любых двух чисел на диагонали – это число вида $6k$, где k – количество прибавлений шестерки, необходимых, чтобы получить из одного числа другое. При этом $k < 5$, так как на диагонали может быть не более пяти чисел. Но $6k$ не заканчивается нулем при $k = 1, 2, 3, 4$. Значит, числа на диагонали оканчиваются на разные цифры.

Аналогично, очередное число в столбце получается из предыдущего прибавлением семерки, но 7, 14, 21 и 28 не делятся на 10.

Разберитесь самостоятельно с диагоналями, идущими сверху вниз в правую сторону.

Взаимно простые числа

Если эти два числа не взаимно простые, то их разность должна делиться на их общий множитель. Их разность – это число 8, которое делится только на 1, 2, 4 и 8. А так как оба выбранных числа нечетные, то они не могут делиться ни на 2, ни на 4 и ни на 8.

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС

Рис. 5

Без общих точек

Легко понять, что в каждом столбце нельзя поместить более, чем два простых числа. При этом, если в каком-то столбце поместить два простых числа, в соседних столбцах не будет места ни для одного. Поэтому максимальное число клеток, заполненными простыми числами, это 8 (как, например, на рисунке 5).

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Рис. 6

Пять простых чисел

Может. Пример приведен на рисунке 6.

Параллелограммы

Обозначим числа, которые находятся в вершинах параллелограмма, через A, B, C и D – по часовой стрелке, начиная от левой нижней вершины. Тогда на сколько A будет больше B, на столько и D будет больше C – например, если A на одну клетку ниже и на две правее, чем B (а это значит, что $A = B + 7 + 2$), то и для C и D верно то же самое. Это можно записать как $A - B = D - C$. Прибавив к обеим частям этого равенства $B + C$, получим требуемое: $A + C = D + B$.

Суммы в квадрате

Заметьте, что случай квадрата 2×2 сразу следует из решения предыдущей задачи – ведь квадрат 2×2 – это тоже параллелограмм, а числа в его противоположных углах как раз образуют его диагональ. В случае квадрата 3×3 три суммы чисел в противоположных углах равны по предыдущей задаче, осталось добавить центральное число, и мы получим, что равны суммы на диагоналях. А случай квадрата 4×4 можно решить, дважды применив предыдущую задачу: сначала для углов этого квадрата, а потом – для углов внутреннего квадрата 2×2. Подумайте, а может ли в календаре встретиться целиком заполненный числами квадрат 5×5?

Эти числа закрыть нельзя

Раскрасим все клетки в три цвета, как показано на рисунке 7. Убедитесь, что как бы ни расположить рассматриваемый прямоугольник, всегда будут закрыты три клетки разного цвета. Но на этой табличке зеленых клеток – 11, а розовых – 9, т.е. разное количество. Поэтому закрыть все клетки не удастся.

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Рис. 7

Вася Двоечкин ошибается

Пусть x – наименьшее число в строке, а y – наименьшее число в столбце, в которых складывал числа Вася Двоечкин. Тогда сумма всех чисел в строке будет такой:

$$x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+5)+(x+6)=7x+21.$$

А сумма всех чисел в столбце будет такой:

$$y+(y+1)+(y+2)+(y+3)+(y+4)=5y+10.$$

Ясно, что первая сумма делится на 7, а вторая делится на 5. Пусть эти суммы равны. Число x может быть одним из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Но только при $x = 4$ первая сумма будет кратна пяти (в этом случае она равна 45). Поэтому будем иметь $5y + 10 = 45$, откуда $y = 7$. Но тогда в столбце будет сложено всего четыре числа, а не пять! Противоречие.

Вася Двоечкин снова ошибается

Эта задача решается аналогично предыдущей.

Все суммы нечетные

Предположим, что это возможно. Так как всего имеется 7 столбиков, то сумма всех чисел таблички должна быть нечетной. С другой стороны, так как имеется 4 строки, то сумма всех чисел таблички должна быть четной. Но одно противоречит другому.

Пять кусков

См. рис. 8.

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Рис. 8

Фокус с календарем

Числа в столбике образуют арифметическую прогрессию с разностью 7. Подсчитать ее сумму можно, например, так: вычесть из большого числа маленькое, разделить на 7, прибавить к полученному числу 1, результат умножить на сумму большого и маленького чисел и поделить на 2.

МОДУЛЬ ВО ВСЕЙ КРАСЕ

2. 1) $\{10; 20\}$; 2) $\{-2; 7\}$.

3. 1) $\{5; 6\}$; 2) 5; 3) 2; 4) 3; 5) 1; 6) 2.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Не может.

Предположим, что такое число n существует.

Заметим, что максимальный возможный остаток от деления на натуральное число m равен $m - 1$. Поэтому сумма остатков от деления произвольного числа на числа $a_1, \ldots, a_{11}$ не больше чем $407 - 11 = 396$, а сумма остатков от деления его на числа $4a_1, \ldots, 4a_{11}$ не больше чем $4 \cdot 407 - 11 = 1617$. Итак, если бы все остатки были максимальными возможными, то их сумма равнялась бы $396 + 1617 = 2013$. Поскольку эта сумма для нашего числа n равна 2012, то все остатки, кроме одного, – максимальные возможные, а один – на единицу меньше максимального возможного.

Значит, при некотором k один из остатков от деления n на числа a_k и $4a_k$ – максимальный возможный, а другой – на единицу меньше максимального возможного. Тогда одно из чисел $n + 1$ и $n + 2$ делится на a_k, а другое – на $4a_k$, т.е. два взаимно простых числа $n + 1$ и $n + 2$ делятся на $a_k \geq 2$. Это невозможно.

2. При $k = 1509$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$ – отмеченные точки в порядке обхода (мы будем считать, что $A_{2013} = A_1$, $A_{2014} = A_2$). Разобьем их на четверки точек $(A_1, A_2, A_{1007}, A_{1008})$, $(A_3, A_4, A_{1009}, A_{1010}), \ldots$ $\ldots, (A_{1005}, A_{1006}, A_{2011}, A_{2012})$. Если среди выбранных k точек встретятся все точки некоторой четверки $(A_{2i-1}, A_{2i}, A_{2i+1005}, A_{2i+1006})$, то в полученном многоугольнике найдутся две стороны $A_{2i-1}A_{2i}$ и $A_{2i+1005}A_{2i+1006}$, которые симметричны относительно центра окружности и потому параллельны. Это невозможно; значит, в каждой из 503 четверок отмечено не более трех вершин, т.е. $k \leq 503 \cdot 3 = 1509$.

Осталось привести пример 1509-угольника без параллельных сторон с вершинами в отмеченных точках. Подходит, например, многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{1006}A_{1008}A_{1010} \ldots A_{2012}$ (его вершинами являются все точки с номерами от 1 до 1006 и все точки с четными номерами от 1008 до 2012). Действительно, стороны $A_{2012}A_1, A_1A_2, \ldots, A_{1005}A_{1006}$ лежат по одну сторону от диаметра $A_{2012}A_{1006}$ и потому не могут быть параллельными; аналогично, стороны $A_{1006}A_{1008}, \ldots, A_{2010}A_{2012}$ попарно непараллельны. Наконец, маленькая диагональ A_jA_{j+2} правильного 2012-угольника не параллельна его сторонам; значит, никакие две стороны вида A_iA_{i+1} и A_jA_{j+2} также не могут быть параллельными.

4. Перемножив равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3k \qquad (1)$$

и неравенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k,$$

получим неравенство

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + a_1^3a_2 + a_1a_2^3 + a_1^3a_3 + a_1a_3^3 + \ldots + a_{n-1}^3a_n + a_{n-1}a_n^3 > 9k^4 + 3k^2. \qquad (2)$$

Возведем теперь в квадрат равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2. \qquad (3)$$

Получим

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 + \ldots + 2a_{n-1}^2a_n^2 = 9k^4. \qquad (4)$$

Вычитая из неравенства (2) равенство (4), получаем

$$\left(a_1^3a_2 - 2a_1^2a_2^2 + a_1a_2^3\right) + \ldots + \left(a_{n-1}^3a_n - 2a_{n-1}^2a_n^2 + a_{n-1}a_n^3\right) > 3k^2,$$

или

$$a_1a_2\left(a_1 - a_2\right)^2 + a_1a_3\left(a_1 - a_3\right)^2 + \ldots + a_{n-1}a_n\left(a_{n-1} - a_n\right)^2 > 3k^2. \qquad (5)$$

Предположим теперь, что любые два числа отличаются не больше чем на 1. Тогда квадрат их разности не больше 1, и из (5) получаем неравенство

$$a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n > 3k^2. \qquad (6)$$

Но если вычесть из квадрата равенства (1) равенство (3), получится равенство $2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n = 6k^2$, что противоречит (6). Значит, найдутся два числа, отличающиеся больше чем на 1.

5. Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак «+», а с противоположным – знак «–». Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.

Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.

Назовем теперь знак *стабильным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечетно, стабильный знак найдется. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменяется и остается стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Предположим, что в некоторый момент какой-то знак изменился. Тогда не все знаки были стабильными, и найдется стабильный знак a, соседний с нестабильным знаком b. Это значит, что в следующую минуту a не изменится, а b изменится и станет таким же, как a, т.е. стабильным.

Итак, пока знаки меняются, количество стабильных знаков строго увеличивается. Значит, рано или поздно оно станет равным 101, и перемены знака закончатся.

Замечание. Можно показать, что знаки могут изменяться в течение лишь первых 50 минут.

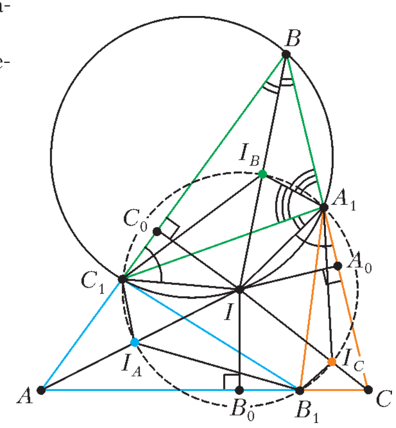


Рис. 9

6. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через A_0, B_0, C_0 – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB соответственно. Будем считать, что точка A_1 лежит на отрезке A_0B (рис.9). Заметим, что $CA_0 + AC_0 = CB_0 + AB_0 = CA$. Из условия следует, что $CA_1 + AC_1 = CB_1 + QB_1 = CA$. Отсюда $CA_0 - CA_1 = AC_1 - AC_0$; это значит, что $A_1A_0 = C_1C_0$, и точка C_1 лежит на отрезке C_0A. Тогда прямоугольные треугольники IA_0A_1 и IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому $\angle IA_1C = \angle IC_1B$. Это значит, что четырехугольник BC_1IA_1 вписан. Аналогично, четырехугольники AB_1IC_1 и CA_1IB_1 также вписаны.

Точки B, I_B и I лежат на одной прямой (биссектрисе угла A_1BC_1), поэтому

$$\angle A_1I_BI = \angle BA_1I_B + \angle A_1BI_B = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1BI = \\ = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1A_1I = \angle I_BA_1I.$$

Значит, треугольник II_BA_1 равнобедренный, т.е. $II_B = IA_1$. Аналогично получаем, что $II_B = IC_1 = II_A = IB_1 = II_C = IA_1$. Значит, I – центр описанной окружности $I_AI_BI_C$.

7. Не могли.

Пусть после нескольких операций снова получились десять последовательных натуральных чисел, причем каждое из исходных чисел участвовало хотя бы в одной операции.

Лемма. *Для любого натурального k при проведении операции количество чисел на доске, делящихся на k, не уменьшается.*

Доказательство. Если в операции участвовали числа a и b, одно из которых делится на k, то и их произведение также делится на k. Более того, если оба исходных числа делятся на k, то и число $a^2 - 2011b^2$ делится на k. Отсюда и следует утверждение леммы.

Заметим, что в начальной и конечной ситуациях есть по пять четных чисел и по одному числу, делящемуся на 10. Значит, ввиду леммы, количество чисел, делящихся на 2, в процессе не должно изменяться, и то же верно для чисел, делящихся на 10.

Среди исходных 10 чисел было число a, делящееся на 5. Рассмотрим теперь первую операцию, в которой оно участвовало; пусть b – второе число, участвовавшее в этой операции. Если b нечетно, то одно из полученных чисел будет четным, и количество четных чисел увеличится, что невозможно. Значит, b четно, и на доске появится число ab, делящееся на 10. Если при этом b не делится на 10, то количество чисел, кратных 10, увеличилось, что невозможно.

Итак, b делится на 10, и в нашей операции участвовали два числа, делящихся на 5. Тогда в ее результате на доске получились два числа, кратных 25. По лемме, и в конечной ситуации найдутся два таких числа; но это невозможно для 10 последовательных натуральных чисел. Противоречие.

8. Рассмотрим произвольные два маршрута l_1 и l_2; пусть A – их общая остановка. Если остановка A находится на всех маршрутах, то можно отдать ее одной компании, а все остальные остановки – другой; ясно, что при этом на каждом маршруте будут остановки обеих компаний.

Пусть теперь найдется маршрут l_3, не проходящий через остановку A. Пусть B и C – его общие остановки с l_1 и l_2 соответственно. Ясно, что B и C отличны от A; заметим, что $B \neq C$, ибо иначе у l_1 и l_2 найдутся две общие остановки.

Распределим теперь остановки по компаниям так: остановки A, B и C отдадим первой компании, все остальные остановки маршрутов l_1, l_2, l_3 – второй компании, а все остановки, не лежащие ни на одном из маршрутов l_1, l_2, l_3, – снова первой (рис.10). Покажем, что это распределение – требуемое. Ясно, что каждый из маршрутов l_1, l_2, l_3 проходит через остановки обеих компаний.

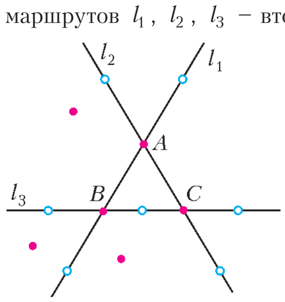


Рис. 10

Рассмотрим любой из оставшихся маршрутов l. С каждым из маршрутов l_1, l_2, l_3 у него лишь одна общая остановка. Значит, на l есть не более трех остановок второй компании; поэтому там есть остановка первой. Далее, l не может проходить через две из остановок A, B, C, иначе он будет иметь две общие остановки с одним из маршрутов l_1, l_2, l_3. Пусть для определенности l не проходит через B и C. Тогда l пересекается с l_3 по некоторой остановке X, отличной от B и C, т.е. принадлежащей второй компании. Утверждение доказано.

10 класс

1. Не может.

Предположим, что такое число n существует.

Заметим, что максимальный возможный остаток от деления на натуральное число m равен $m - 1$. Поэтому сумма остатков от деления произвольного числа на числа $a_1, \ldots, a_{10}$ не больше чем $678 - 10 = 668$, а сумма остатков от деления его на числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ не больше чем $2 \cdot 678 - 10 = 1346$. Итак, если бы все остатки были максимальными возможными, то их сумма равнялась бы $668 + 1346 = 2014$. Поскольку эта сумма для нашего числа n равна 2012, возможны только два случая: *случай 1*, когда ровно один из остатков на 2 меньше максимального возможного, а остальные – максимальные возможные; *случай 2*, когда ровно два остатка на 1 меньше максимальных возможных.

В *случае 1* мы получаем, что при некотором k один из остатков от деления n на числа a_k и $2a_k$ – максимальный возможный, а другой – на 2 меньше максимального возможного. Тогда одно из чисел $n + 1$ и $n + 3$ делится на a_k, а другое – на $2a_k$, т.е. оба делятся на a_k. Это невозможно, так как число $(n + 3) - (n + 1) = 2$ не может делиться на $a_k > 2$.

Случай 2 также невозможен. Действительно, среди остатков от деления n на четные числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ по крайней мере восемь – максимальные возможные, т.е. нечетные. Значит, n – нечетное число, и потому все остатки от деления его на числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ нечетны. Таким образом, они – максимальные возможные. Поэтому $n + 1$ делится на все числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ и, следовательно, на все числа $a_1, \ldots, a_{10}$, т.е. все 20 остатков – максимальные возможные. Противоречие.

Замечание. Можно показать, что ответ остается отрицательным, если предположить только, что все числа a_i больше 1.

2. Пусть для определенности $AB < AC$. Пусть луч DI пересекает отрезки AO и AC в точках P и Q соответственно (рис.11). Имеем

$$\angle AIP = \angle DQC - \angle IAC = 90^\circ - \angle C - \angle A/2$$

и

$$\angle IAP = \angle OAB - \angle IAB = \left(180^\circ - \angle AOB\right)/2 - \angle A/2 = 90^\circ - \angle C - \angle A/2 .$$

Таким образом, треугольник API равнобедренный ($AP = PI$),

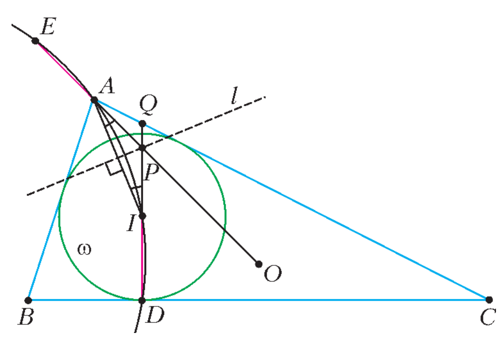


Рис. 11

т.е. точка P лежит на серединном перпендикуляре l к AI, и лучи PA и PI симметричны относительно l. Описанная окружность треугольника AID также симметрична относительно l. Получаем, что отрезки AE и ID тоже симметричны, поэтому они равны.

Замечание 1. Из этого решения, в частности, следует, что точка E всегда лежит на продолжении отрезка OA за точку A.

Замечание 2. Из доказанного следует, что степень точки O относительно окружности a, описанной около треугольника AID, равна $R(R + r)$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Ясно, что степени точки O относительно окружностей b и c, построенных аналогично a, будут такими же. Из этого следует, что IO является общей радикальной осью трех окружностей a, b и c и эти окружности имеют две общие точки: одна – это точка I, а другая лежит на прямой IO. Используя формулу Эйлера для расстояния между I и O, нетрудно найти положение второй точки пересечения указанных окружностей.

4. Рассмотрим конечную ситуацию на доске. Если многочлен P появился как сумма многочленов Q и R, то проведем стрелки из P в Q и R. Далее, если из многочлена F ведет (ориентированный!) путь в G, будем говорить, что G *участвует* в F (в частности, сам F участвует в F). Нетрудно видеть в этом случае, что все коэффициенты многочлена $F - G$ неотрицательны.

Можно считать, что каждый многочлен на доске – сумма различных степеней x; действительно, если какой-то коэффициент многочлена не меньше 2, то и у всех многочленов, в которых он участвует, соответствующий коэффициент также будет не меньше 2. Значит, он не участвует в суммах вида S_i.

Мы собираемся оценить общее количество многочленов на доске. Каждый из многочленов $S_1, \ldots, S_n$ назовем *финальным*. Каждый из многочленов, участвующих в S_n (т.е. в сумме всех исходных одночленов), назовем *существенным*.

Ясно, что есть n финальных многочленов.

Покажем индукцией по p, что в многочлене с p ненулевыми коэффициентами участвуют ровно $2p - 1$ многочленов (из которых p – одночлены); отсюда будет следовать, что количество существенных многочленов равно $2n + 1$. База при $p = 1$ очевидна. Пусть теперь многочлен P был получен на некотором шаге как сумма Q и R, и количества ненулевых коэффициентов в P, Q и R равны p, q и r соответственно; тогда $p = q + r$. По предположению индукции, в Q и R участвуют $2q - 1$ и $2p - 1$ многочленов, среди которых нет совпадающих (поскольку в Q и R нет общих одночленов). Тогда в P, с учетом самого P, участвуют $(2q - 1) + (2r - 1) + 1 = 2p - 1$ многочленов.

Покажем, наконец, что в каждую минуту на доске появлялось не более одного финального существенного многочлена. Действительно, пусть в некоторую минуту появились одновременно существенные многочлены S_p и S_q $(p < q)$. Рассмотрим первый момент, когда на доске появился многочлен P, в котором одновременно участвуют и S_p, и S_q; тогда он появился как сумма двух многочленов, каждый из которых содержит одночлен x^p. Но тогда коэффициент при x^p в P не меньше 2, что невозможно.

Итак, на доске есть n финальных и $2n + 1$ существенных многочленов, при этом не больше m из них являются и теми, и другими. Значит, общее количество многочленов на доске не меньше чем $n + (2n + 1) - m$. С другой стороны, исходно на доске было $n + 1$ многочленов, а добавилось не больше чем mk. Значит, $(n+1) + mk \geq n + (2n+1) - m$, или $m(k+1) \geq 2n$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если зафиксировать натуральное k, то при всех достаточно больших n оценка в задаче точна.

6. Существуют.

Эта задача является частным случаем задачи М2282,в «Задачника «Кванта».

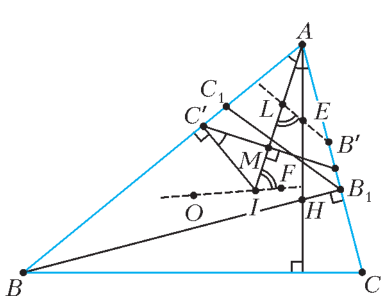


Рис. 12

8. Будем считать, что $AB > AC$ (рис.12). Пусть BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, H – точка их пересечения, I и O – центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а r – радиус его вписанной окружности; положим $\angle BAC = \alpha$. Заметим, что $AB_1 = AB\cos\alpha$, $AC_1 = AC\cos\alpha$. Значит, треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k = \cos\alpha$.

Пусть точка L симметрична точке I относительно $B'C'$.

Лемма. *Точки L и I – соответственные точки в треугольниках AB_1C_1 и ABC.*

Доказательство. Поскольку $AI \perp B'C'$, точка L лежит на биссектрисе AI. Значит, достаточно доказать, что $\frac{AL}{AI} = k$.

Обозначим через M середину отрезка $B'C'$. Заметим, что прямоугольные треугольники $AC'I$ и $C'MI$ подобны, поэтому

$$\angle MC'I = \angle C'AI = \alpha/2.$$

Имеем

$$AI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)},$$

$$AL = AI - LI = AI - 2MI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} - 2r\sin(\alpha/2),$$

значит,

$$\frac{AL}{AI} = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) = \cos\alpha = k,$$

что и требовалось доказать.

Точки A, B_1, C_1 и H лежат на окружности с диаметром AH, поэтому E – центр этой окружности. Значит, точки E и O в треугольниках AB_1C_1 и ABC также соответственны; поэтому $\angle OIA = \angle ELA$. Так как точка F симметрична E относительно $B'C'$, отрезки FI и EL также симметричны, и $\angle FIA = \angle ELI$. Итак, $\angle OIA + \angle FIA = \angle ELA + \angle ELI = 180°$, что и означает, что точки O, I, F лежат на одной прямой.

11 класс

3. Лемма. *Раскрасим клетки плоскости в два цвета: нечетные столбцы в зеленый цвет, а четные – в желтый. Тогда для любого отрезка, параллельного прямой l, разность сумм длин его зеленых и желтых участков не превосходит некоторого числа D, зависящего только от l.*

Доказательство. Прямая l разбивается вертикальными сторонами клеток на отрезки одинаковой длины; обозначим эту длину через F. Тогда для любого отрезка длины $2F$, параллельного l, суммы длин его зеленых и желтых частей равны F. А любой отрезок, параллельный l, разбивается на такие отрезки и остаток длины, меньшей $2F$; поэтому разность сумм длин его зеленых и желтых частей не превосходит $D = 2F$.

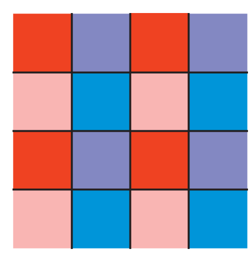


Рис. 13

Перейдем к решению задачи. Раскрасим все черные клетки в розовый и голубой цвета так, чтобы розовые клетки были в тех же столбцах, что и красные, а голубые – в тех же, что и синие (рис.13). Рассмотрим любой отрезок, параллельный l, и обозначим через r, b, r', b' суммы длин его красных, синих, розовых и голубых частей соответственно. Тогда по лемме существуют такие числа D_1, D_2, зависящие только от l, что

$$\left|(r + r') - (b + b')\right| \leq D_1,$$

$$\left|(r + b') - (r' + b)\right| \leq D_2.$$

Значит,

$$2|r - b| = \left|(r + r') - (b + b') + (r + b') - (r' + b)\right| \leq$$

$$\leq \left|(r + r') - (b + b')\right| + \left|(r + b') - (r' + b)\right| \leq D_1 + D_2,$$

т.е. $|r - b| \leq \frac{D_1 + D_2}{2}$, что и требовалось доказать.

Замечание. На самом деле в лемме можно положить $D = F$.

5. Пусть $a_1 \neq a_3$; тогда существует такое x_0, что $a_1x_0 + b_1 = a_3x_0 + b_3$. Подставляя $x = x_0$ в данное равенство, получаем после сокращения $P(a_2x_0+b_2)=0$, т.е. у $P(x)$ есть корень.

Аналогично рассматривается случай $a_2 \neq a_3$.

Остался лишь случай $a_1=a_2=a_3\neq 0$. Если $P(x)\equiv 0$, утверждение задачи очевидно. Иначе пусть $p_0\neq 0$ – старший коэффициент многочлена $P(x)$, а n – его степень. Тогда старшие коэффициенты многочленов в левой и правой частях данного равенства есть $p_0\left(a^n+a^n\right)$ и p_0a^n, т.е. они различны. Это невозможно.

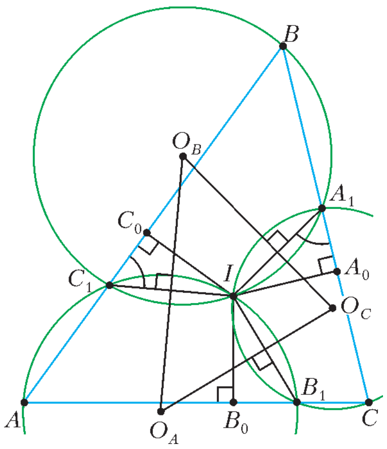


Рис. 14

6. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через A_0, B_0, C_0 – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB соответственно (рис.14). Будем считать, что точка A_1 лежит на отрезке A_0B. Заметим, что $CA_0+AC_0=CB_0+AB_0=CA$. Из условия следует, что $CA_1+AC_1=CB_1+AB_1=CA$. Поэтому $CA_0-CA_1=AC_1-AC_0$; тогда $A_1A_0=C_1C_0$, и точка C_1 лежит на отрезке C_0A. Значит, прямоугольные треугольники IA_0A_1 и IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому $\angle IA_1C=\angle IC_1B$ и $IA_1=IC_1$. Следовательно, четырехугольник BC_1IA_1 вписан. Аналогично, четырехугольники AB_1IC_1 и CA_1IB_1 также вписаны, и $IA_1=IB_1=IC_1$.

Линии центров O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B являются серединными перпендикулярами к общим хордам IA_1, IB_1, IC_1 соответственно; длины этих хорд равны. Значит, расстояния от I до сторон треугольника $O_AO_BO_C$ равны $\frac{IA_1}{2}=\frac{IB_1}{2}=\frac{IC_1}{2}$. Наконец, поскольку углы IBA_1, IAC_1, ICB_1 острые, то отрезки O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B пересекают лучи IA_1, IB_1, IC_1 соответственно. Значит, I лежит внутри треугольника $O_AO_BO_C$ и является центром вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$.

7. Противник.

Приведем стратегию для второго игрока, позволяющую ему выиграть. Для этого он будет добиваться выполнения следующего условия: перед каждым ходом первого, если осталось $2k+1\geq 5$ точек, то на любой полуокружности осталось не менее k отмеченных точек.

Покажем индукцией по числу ходов, что это возможно. В начале игры это условие выполнено. Пусть перед ходом первого оно выполнено; пронумеруем оставшиеся точки по порядку $A_0,\ldots,A_{2k}$. Пусть для определенности первый своим ходом удаляет точку A_0; заметим, что треугольник $A_{k+1}A_1A_{k+2}$ остроугольный, так что игра еще не закончилась. Второму достаточно удалить точку A_k. Теперь, если с некоторой полуокружности удалено не более одной точки, на ней осталось не менее $k-1$ точки; иначе с нее стерты обе точки A_0 и A_k, поэтому на ней остались либо точки $A_1,\ldots,A_{k-1}$, либо точки $A_{k+1},\ldots,A_{2k}$; в любом случае для нее требуемое условие выполнено.

Итак, если первый не проиграет раньше, то после $2n-4$ ходов на доске останется пять точек A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Пусть для определенности первый удалит точку A_0; тогда еще останется остроугольный треугольник $A_1A_2A_4$. Второй же последним ходом удалит A_4, и оставшийся треугольник $A_1A_2A_3$ будет тупоугольным (иначе нашлась бы полуокружность, содержащая лишь A_2). Значит, второй выиграет.

Замечание 1. Естественно, вместо точки A_k второй может выбрать также точку A_{k+1}. Ясно, что при описанной стратегии в конце игры останутся именно три отмеченные точки.

Замечание 2. По сути ту же стратегию можно оформить подругому. Соединим каждую из исходных точек с двумя наиболее удаленными от нее. Все проведенные отрезки образуют одну $(2n+1)$-звенную ломаную. Тогда второй может ходить так, чтобы после каждого его хода (кроме последнего) все **стертые** точки разбивались на пары точек, соединенных отрезком. Можно показать, что соблюдения этого условия также достаточно для выигрыша.

8. Для простого p и натурального n обозначим через $\nu_p(n)$ степень, в которой p входит в разложение n на простые множители. Заметим, что если $\nu_p(n)\neq\nu_p(k)$, то

$$\nu_p(n\pm k)=\min\left(\nu_p(n),\nu_p(k)\right).$$

Предположим противное; обозначим $P=10^{2012}$. Тогда все простые делители чисел вида S_n не превосходят P.

Лемма. *Пусть $\nu_p(S_n)<\nu_p((n+1)!)$ при некотором n. Тогда $\nu_p(S_k)=\nu_p(S_n)$ при всех $k\geq n$.*

Доказательство. Обозначим $a=\nu_p(S_n)$, $b=\nu_p((n+1)!)$; тогда $b\geq a+1$. Заметим, что $S_k=S_n+(n+1)!+\ldots+k!$; в этой сумме все слагаемые, кроме первого, делятся на p^{a+1}, а первое делится лишь на p^a, но не на p^{a+1}. Значит, и S_k делится на p^a, но не на p^{a+1}.

Рассмотрим некоторое простое $p\leq P$. Ввиду леммы, если $\nu_p(S_n)<\nu_p((n+1)!)$ при некотором n, то существует число a_p такое, что $\nu_p(S_n)\leq a_p$ при всех натуральных n. Назовем такое простое число p *маленьким*; все остальные простые числа, меньшие P, назовем *большими*. Так как маленьких простых конечное количество, существует натуральное M, большее любого числа вида p^{a_p}, где p – маленькое.

Пусть теперь p – большое простое число, а n – такое число, что $n+2 \vdots p$. Тогда из леммы имеем $\nu_p(S_{n+1})\geq\nu_p((n+2)!)>$ $>\nu_p((n+1)!)$; значит, $\nu_p(S_n)=\nu_p(S_{n+1}-(n+1)!)=$ $=\nu_p((n+1)!)=\nu_p(n!)$ (последний переход верен, ибо $n+1$ не кратно p).

Рассмотрим теперь число $N=MP!-2$. По доказанному, $\nu_p(S_N)=\nu_p(N!)$ для любого большого простого p. Кроме того, поскольку $N\geq M$, то $\nu_p(S_N)\leq\nu_p\left(p^{a_p}\right)\leq\nu_p(N!)$ для любого маленького простого p. Поскольку все простые делители числа S_N – либо большие, либо маленькие, отсюда следует $S_N\leq N!$, что, очевидно, неверно. Противоречие.

Замечание. После доказательства леммы можно завершить решение и по-другому. Например, можно показать, что $\nu_p(S_{n-1})=\nu_p(n!)$ для любого n, кратного большому простому p. Предположим противное, тогда $\nu_p(S_{n-1})>\nu_p(n!)$. Рассмотрим число

$$S_{n+p-1}=$$
$$=S_{n-1}+n!\cdot\left(1+(n+1)+(n+1)(n+2)+\ldots+(n+1)\ldots(n+p-1)\right).$$

Обозначим через A_n выражение в скобках в правой части; тогда $A_n\equiv 1+1!+2!+\ldots+(p-1)!=1+S_{p-1}\pmod p$. Поскольку $S_{p-1}\vdots p$ по лемме, получаем, что A_n не делится на p и потому

$$\nu_p\left(S_{n+p-1}\right)=\min\left(\nu_p(S_{n-1}),\nu_p(n!)\right)=\nu_p(n!)<\nu_p((n+p)!).$$

Это противоречит лемме. Отсюда, полагая $N=kP!-1$ при некотором натуральном $k\geq M$, получаем $\nu_p(S_N)\leq$ $\leq\nu_p((N+1)!)$ для любого $p\leq P$. В то же время, у числа $(N+1)!$ есть простые делители, большие P, и нетрудно показать, что при достаточно большом k их вклад больше, чем $N+1$; значит, $S_k \le (N+1)!/(N+1) = N!$, что неверно.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. 1) Поплавок всплывет; 2) $x = x_0 \dfrac{ka}{\left(k + \rho_0 S(g+a)\right)g}$; 3) $x = 2{,}14$ см.

2. $L_0 = 1{,}5$ м, $k = 40$ Н/м, $m = 0{,}5$ кг.

3. 1) $t_4 = 25\ ^\circ\mathrm{C}$; 2) $\tau_2 \approx 20$ с.

4. 1) $U_D = I_B R_1 - I_C R_2 = 13$ В, ток через диод не течет (диод заперт);

2) $U_D = U_0 = 2$ В (диод открыт),

$$I_D = \frac{I_B R_1 - I_C R_2 - U_0}{R_1 + R_2} = 1\ \text{мА}.$$

5. Геометрическое место точек, где мог бы находиться источник света S, это луч OC, получающийся отражением луча OB в зеркале M_1 (рис.15). Зеркало M_2 лежит на биссектрисе

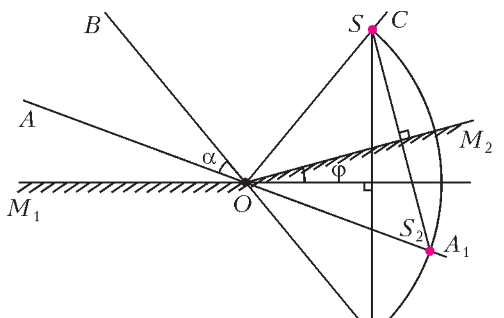


Рис. 15

угла COA_1. На рисунке для некоторого положения источника S показаны положения его изображений S_1 и S_2 в зеркалах M_1 и M_2 соответственно.

10 класс

1. $F = m\left(\dfrac{v^2 \operatorname{tg}^3\alpha + \mu g h}{h(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} - \dfrac{v^2\operatorname{tg}^3\alpha}{h}\right)$.

2. $\omega = \dfrac{n}{R}\sqrt{\dfrac{2(n-1)p_0}{\rho}}$.

3. График зависимости температуры T от объема V имеет вид параболы, изображенной на рисунке 16. Температура будет монотонно возрастать при условии $V_2 > \dfrac{3}{2}V_1$ и монотонно убывать при условии $V_2 < \dfrac{5}{4}V_1$.

4. $m_1 : m_2 : m_3 = R_1^3 : R_2^3 : R_3^3$.

5. См. рис.17.

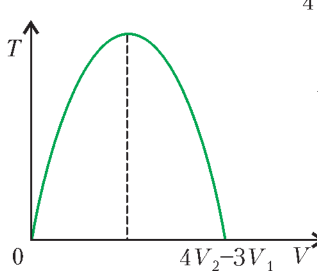


Рис. 16

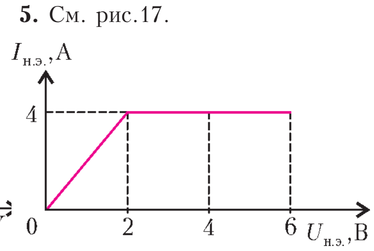


Рис. 17

11 класс

1. $M = \dfrac{2km_0^2 h}{m_1 g(m_1 - 2m_0)} - m_0 = 2$ кг.

2. 1) $d' = d + \dfrac{mv_0 R}{B^2 l^2}$; 2) $Q = \dfrac{mv_0^2}{4}$.

3. $F_x(x) = -\dfrac{2qlE_0}{L^2}x$; $v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{2qlE_0}{m}}$; $t = \dfrac{\pi}{\omega} - 2\operatorname{arctg}\dfrac{v_0}{\omega L}$,

где $\omega = \sqrt{\dfrac{2qlE_0}{mL^2}}$ – циклическая частота гармонических колебаний диполя.

4. $A_{\max} = \dfrac{13}{98}RT_B = 540{,}15$ Дж (процесс начинается в точке B, в которой прямая BD касается изотермы, а заканчивается в точке D, в которой прямая BD касается адиабаты).

5. По условию плоскости линз образуют правильный многоугольник. Из центра C проводим два луча CG и CE, образующие с ближайшими прямыми CA и CB углы $\alpha = 2\pi/N$ (рис.18). Это и будут проекции плоскостей линз на плоскость рисунка.

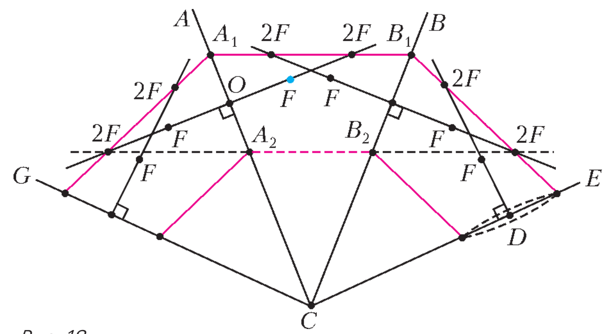


Рис. 18

Предположим, что данныйы фокус F принадлежит левой линзе. Проведем через него перпендикуляр к этой линзе. Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью линзы даст положение ее оптического центра O. Отметим на остальных плоскостях оптические центры линз.

Многоугольник правильный, поэтому ход луча относительно плоскости линзы симметричен. Из формулы для тонкой собирающей линзы следует, что при таком ходе луч пересекает главную оптическую ось линзы на двойном фокусном расстоянии. Если же линза рассеивающая, то точку двойного фокуса пересечет воображаемое продолжение луча. Откладываем на главных оптических осях каждой линзы двойные фокусные расстояния. Луч, идущий через двойные фокусы, лежащие внутри области ACB, пойдет относительно точки C дальше оптических центров линз. Это соответствует собирающей линзе. Луч, идущий через двойные фокусы, лежащие снаружи области ACB, пойдет относительно точки C ближе оптических центров линз. Это соответствует рассеивающей линзе. Пусть эти лучи пересекают плоскости линз CA и CB в точках A_1, B_1 и A_2, B_2. Откладывая от центра C отрезки длиной CB_1, мы восстановим точки, через которые пройдет искомый луч, если линзы собирающие. Если откладывать от центра C отрезки длиной CB_2, мы восстановим точки, через которые пройдет искомый луч, если линзы рассеивающие. Убеждаемся, что в обоих случаях луч проходит сквозь линзу (ее радиус равен $D/2$).

Теперь предположим, что данный фокус F относится к правой линзе. Выполнив все построения аналогично ранее рассмотренному случаю, убеждаемся, что луч пройдет мимо линзы (на расстоянии, большем ее радиуса $D/2$).

Итак, возможны два варианта. Линзы могут быть собирающими и рассеивающими, фокус F принадлежит левой линзе.

LIII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1 (*А.Калмынин*). Пусть D – точка пересечения прямых BJ и KM. Используя касание окружности, имеем $JK \perp AB$, $JL \perp AC$, $JM \perp BC$. Заметим, что точки A, K, J, L лежат на одной окружности Ω (с диаметром AJ). Прямые BJ и CJ является внешними биссектрисами углов ABC и ACB, а также серединными перпендикулярами к отрезкам KM и LM соответственно. Положив $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, имеем $\angle JBC = \dfrac{\pi - \beta}{2}$, $\angle JCB = \dfrac{\pi - \gamma}{2}$. Из треугольника JBC находим $\angle BJC = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$, а из прямоугольного треугольника JGD: $\angle JGD = \dfrac{\pi}{2} - \angle BJC = \dfrac{\alpha}{2}$. Из симметрии относительно прямой CJ: $\angle JGL = \angle JGM = \dfrac{\alpha}{2}$, откуда $\angle KGL = \angle JGL + {}$ $+ \angle JGM = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \alpha$.

Так как $\angle KGL = \angle KAL = \alpha$, то точки A, K, L, G лежат на одной окружности, т.е. G лежит на окружности Ω. Отсюда $\angle AGJ = \angle ALJ = 90°$. Получаем, что в треугольнике ACT прямая CG является высотой и биссектрисой. Значит, $AC = CT$, и CG – серединный перпендикуляр к отрезку AT. Из симметрии относительно CG имеем $JT = JA$.

Повторяя эти рассуждения для точек F и S, получаем $JS = JA$, а значит, $JT = JS$. В равнобедренном треугольнике JST прямая JM является высотой, а следовательно, и медианой, т.е. $SM = TM$, что и требовалось доказать.

2. По неравенству о средних для k чисел $\dfrac{1}{k-1}, \dfrac{1}{k-1}, \ldots, \dfrac{1}{k-1}$, a_k имеем

$$\frac{1 + a_k}{k} = \frac{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1} + a_k}{k} \ge \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} a_k},$$

откуда $(1 + a_k)^k \ge \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k$, причем неравенство обращается в равенство лишь при $a_k = \dfrac{1}{k-1}$.

Перемножив получившиеся неравенства для $k = 2, 3, \ldots, n$, получим

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \ge \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a_2 a_3 \ldots a_n = n^n.$$

Остается понять, что доказанное неравенство не обращается в равенство. В противном случае, как было отмечено, $a_k = \dfrac{1}{k-1}$ для всех $k = 2, 3, \ldots, n$. Но тогда $a_2 a_3 \ldots a_n < 1$, что противоречит условию.

3. Вначале переформулируем условие следующим образом. Считаем, что игрок B за один вопрос разбивает множество $T = \{1, 2, \ldots, N\}$ на два непересекающихся подмножества S и $\overline{S}$, а игрок A своим ответом *отмечает* то из подмножеств S и $\overline{S}$, в котором, согласно его ответу, *не лежит* загаданное число x. Все числа отмеченного подмножества называем отмеченными числами. Если одно из чисел $y \in T$ будет отмечено в $k + 1$ последовательных ответах, то $x \ne y$, так как хотя бы один из этих ответов должен быть правдивым. Наоборот, если к некоторому моменту оказалось, что ни одно из чисел множества T не было отмечено в $k + 1$ последовательных ответах, то x может быть равным любому из чисел множества T. Действительно, x может равняться данному $y \in T$, если правдивыми были в точности все те ответы, в которых y не был отмечен.

1 (*А.Матушкин*). Покажем, что если $N > 2^k$, то B сможет играть так, чтобы какое-то число $y \in \{1, 2, \ldots, N\}$ стало отмечено в $k + 1$ последовательных ответах. После этого, зная, что $y \ne x$, игрок B фактически продолжит игру с $N - 1$ числом. Так будем «убирать» числа, пока их не останется 2^k. Пусть B разделит T на множества X_0 и $\overline{X_0}$ так, что $|X_0| = 2^k$ (здесь и далее $|C|$ означает количество элементов множества C), и будет повторять вопрос про X_0 и $\overline{X_0}$. Если игрок A отмечает $k + 1$ раз подряд множество $\overline{X_0}$, то x наверняка в множестве X_0 (и можно положить $X = X_0$). Иначе рассмотрим вопрос, в котором игрок A отмечает X_0. Следующим вопросом спрашиваем про множества Y_1 и $\overline{Y_1}$, где $|Y_1| = 2^{k-1}$ и $Y_1 \subset X_0$. Если игрок A отмечает множество Y_1, то положим $X_1 = Y_1$. Иначе положим $X_1 = \overline{Y_1} \cap X_0$. В любом случае мы получили множество X_1 такое, что $|X_1| = 2^{k-1}$ и все числа из множества X_1 отмечены уже в двух вопросах подряд. Продолжаем далее. Выбираем $Y_2 \subset X_1$ такое, что $|Y_2| = 2^{k-2}$, и следующий вопрос задаем про Y_2 и $\overline{Y_2}$. В зависимости от ответа игрока A определяем множество X_2 (равное либо Y_2, либо $\overline{Y_2} \cap X_1$) такое, что $|X_2| = 2^{k-2}$ и все числа из множества X_2 отмечены уже в трех вопросах подряд. Пусть B продолжит такую серию из k вопросов. По окончании ее мы имеем множество X_k, содержащее ровно одно число ($|X_k| = 2^0 = 1$), причем это число отмечено уже в $k + 1$ вопросах подряд.

2 (*Д.Клюев*). Пусть A выбрал $N = \left[1{,}99^k\right] + 2$, где k – достаточно большое (насколько большое, будет видно из последнего абзаца решения). Достаточно показать, что A сможет играть так, чтобы никогда ни одно из чисел множества T не было отмечено в $k + 1$ последовательных ответах.

Для каждого числа $y \in T$ и номера вопроса i пусть $a_i(y)$ обозначает количество вопросов подряд до i-го вопроса (не включая i-й вопрос), в которых y был отмечен (возможно, $a_i(y) = 0$; в частности $a_1(y) = 0$). Для каждого подмножества $K \subset T$ положим $b_i(K) = \sum\limits_{y \in K} 1{,}995^{a_i(y)}$; для краткости положим $b_i = b_i(T)$. Покажем, что игрок A может отвечать так, чтобы для всех i число b_i было меньше чем $1{,}995^k$. Тогда для каждого i и $y \in T$ будем иметь $a_i(y) < k$, и, значит y не было отмечено k раз подряд.

При $i = 1$ имеем $b_1 = N < 1{,}995^k$. Предположим, что $b_i < 1{,}995^k$, и рассмотрим i-й вопрос. Покажем, что ответ на него может быть таким, что $b_{i+1} < 1{,}995^k$. Пусть игрок B на i-м вопросе разбил множество T на множества S и $\overline{S}$. Без ограничения общности будем считать, что $b_i(S) \ge b_i(\overline{S})$ (так как $b_i(S) + b_i(\overline{S}) = b_i$, это означает, что $b_i(\overline{S}) \le b_i/2$. Пусть своим ответом на i-й вопрос игрок A отметит множество $\overline{S}$. Тогда для $y \in S$ имеем $a_{i+1}(y) = 0$, а для $y \in \overline{S}$ имеем $a_{i+1}(y) = a_i(y) + 1$. Таким образом,

$$b_{i+1} = b_{i+1}(S) + b_{i+1}(\overline{S}) = |S| + 1{,}995 b_i(\overline{S}).$$

Если $b_i < 1{,}955^{k-1}$, то

$$b_{i+1} = |S| + 1{,}995 b_i(\overline{S}) \le 1{,}995 b_i(S) + 1{,}995 b_i(\overline{S}) = 1{,}995 b_i,$$

откуда $b_{i+1} < 1{,}995^k$, что и требуется.

Пусть теперь $b_i \ge 1{,}995^{k-1}$. Тогда

$$b_{i+1} = |S| + 1{,}955 b_i(\overline{S}) \le N + 1{,}995 b_i/2 =$$
$$= N + b_i - 0{,}0025 b_i \le 1{,}99^k + 2 + b_i - 0{,}0025 \cdot 1{,}995^{k-1}.$$

Для всех достаточно больших k выполнено

$$1{,}99^k + 2 < 0{,}0025 \cdot 1{,}995^{k-1},$$

а значит,

$$b_{i+1} \le b_i < 1{,}995^k,$$

что и требуется.

4 (*М.Григорьев*).

Ответ: $f(x)=tx^2$, $f(x)=\begin{cases}0, & x=2n,\\ t, & x=2n+1,\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}0, & x=4n,\\ t, & x=2n+1,\\ 4t, & x=4n+2,\end{cases}$ где $t\in\mathbb{Z}$.

Пусть f – не равная тождественно нулю функция, удовлетворяющая данному равенству

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a). \quad (1)$$

Подставляя в (1) $a=b=c=0$, имеем $3f(0)^2=6f(0)^2$, откуда $f(0)=0$. Далее, подставив в (1) $a=0$, $c=-b$, имеем $0+f(b)^2+f(-b)^2=0+2f(b)f(-b)+0$, откуда $(f(b)-f(-b))^2=0$, а значит, $f(-b)=f(b)$ при всех $b\in\mathbb{Z}$, т.е. f – четная функция.

Посмотрим на (1) как на квадратное уравнение относительно $f(c)$ (здесь a и b – произвольные целые, $c=-a-b$): $f(c)^2-2(f(a)+f(b))f(c)+(f(a)-f(b))^2=0$. Решая его, получим, что

$$f(c)=f(a)+f(b)\pm2\sqrt{f(a)f(b)}. \quad (2)$$

Так как $f(x)$ принимает целые значения, то $f(a)f(b)$ является точным квадратом.

Зафиксируем некоторое $a\in\mathbb{Z}$, для которого $f(a)\neq0$. Представим $f(a)$ в виде ks^2, где $\pm k$ равно произведению всех простых чисел, которые содержатся в разложении $|f(a)|$ в нечетной степени. Рассмотрим произвольное $b\in\mathbb{Z}$. Если $f(b)=0$, то положим $f(b)=k\cdot0^2$; иначе запишем разложение $f(b)$, аналогичное разложению $f(a)$: $f(b)=k_1s_1^2$. Чтобы произведение $f(a)f(b)=kk_1(ss_1)^2$ было точным квадратом, необходимо, чтобы k и k_1 были одного знака и содержали в разложении одни и те же простые множители, т.е. $k=k_1$. Итак, $f(b)=ks_1^2$. Иначе говоря, мы представили f в виде $f(x)=kg(x^2)$, где k – фиксированное ненулевое целое число. Так как f – четная функция и $f(0)=0$, то g можно считать четной функцией, принимающей неотрицательные значения, причем $g(0)=0$. Подставив выражение f через g в (2), имеем

$$kg(c)^2=k\left(g(a)^2+g(b)^2\pm2g(a)g(b)\right)=k\left(g(a)\pm g(b)\right)^2,$$

$$g(c)=|g(a)\pm g(b)|.$$

Для любых $b,c\in\mathbb{Z}$ полагаем $a=-b-c$ и с учетом $g(-b-c)=g(b+c)$ получаем

$$|g(b+c)\pm g(b)|=g(c). \quad (3)$$

Пусть $g(1)=l\geq0$. Согласно (3), $|g(2)\pm l|=l$, и так как $g(2)\geq0$, то для $g(2)$ имеются две возможности: 1) $g(2)=0$ или 2) $g(2)=2l$. Если $g(2)=2l$, то из (3) получаем $|g(3)\pm2l|=l$. Так как $g(3)\geq0$, снова имеем две возможности: 2.1) $g(3)=3l$ или 2.2) $g(3)=l$.

1) Пусть $g(2)=0$. Предполагая, что $g(2n-1)=l$, $g(2n)=0$, докажем, пользуясь (3), что $g(2n+1)=l$, $g(2n+2)=0$ (так как для $n=1$ предположение верно, отсюда будет следовать периодичность g с периодом 2 на множестве $\mathbb{N}$ и, в силу четности g, на множестве $\mathbb{Z}$). В самом деле, $|g(2n+1)|=|g(2n+1)\pm g(2n)|=g(1)=l$, откуда (с учетом $g(2n+1)\geq0$) $g(2n+1)=l$; $|g(2n+2)|=|g(2n+2)\pm g(2n)|=g(2)=0$, откуда $g(2n+2)=0$.

2.1) В этом случае индукцией по n с базой индукции $n=1, 2, 3$ покажем, что $g(n)=nl$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Возьмем $n\geq4$ и предположим, что $g(k)=kl$ для $k=1, 2, \ldots, n-1$. Тогда, используя (3), получаем $|g(n)\pm(n-1)l|=l$, значит, $g(n)=nl$ либо $g(n)=(n-2)l$. Далее, $|g(n)\pm g(n-2)|=2l$, $|g(n)\pm(n-2)l|=2l$. Так как $(n-2)l\geq2l$ и $g(n)\geq0$, то $g(n)=nl$ либо $g(n)=(n-4)l$. Остается одна возможность: $g(n)=nl$.

2.2) Предполагая, что $g(4n-4)=0$, $g(4n-3)=g(4n-1)=l$, $g(4n-2)=2l$, докажем, пользуясь (3), что $g(4n)=0$, $g(4n+1)=g(4n+3)=l$, $g(4n+2)=2l$. Для $n=1$ предположение верно, и мы получим, что g периодична с периодом 4. Имеем $|g(4n)\pm l|=|g(4n)\pm g(4n-1)|=g(1)=l$, откуда $g(4n)=0$ либо $g(4n)=2l$. Далее, $|g(4n)\pm2l|=|g(4n)\pm g(4n-2)|=g(2)=2l$, откуда $g(4n)=0$ либо $g(4n)=4l$. Единственный возможный вариант: $g(4n)=0$. Имеем

$$|g(4n+1)|=|g(4n+1)\pm g(4n)|=g(1)=l\Rightarrow g(4n+1)=l;$$

$$|g(4n+2)|=|g(4n+2)\pm g(4n)|=g(2)=2l\Rightarrow g(4n+2)=2l;$$

$$|g(4n+3)|=|g(4n+3)\pm g(4n)|=g(3)=l\Rightarrow g(4n+3)=l.$$

Мы рассмотрели все возможности для функции g, которые соответственно приводят к функциям f вида:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & x=2n,\\ t, & x=2n+1;\end{cases}$

2.1) $f(x)=tx^2$;

2.2) $f(x)=\begin{cases}0, & x=4n,\\ t, & x=2n+1,\\ 4t, & x=4n+2.\end{cases}$

Непосредственная проверка показывает, что все три найденные серии удовлетворяют уравнению (1). Функция, тождественно равная 0, входит в любую из трех найденных серий.

5 (*Д.Крачун*). Пусть ω_A – окружность с центром A, проходящая через точку C. Из условия следует, что точка L лежит на окружности ω_A. Аналогично, пусть ω_B – окружность с центром B, проходящая через точки C и K. Пусть прямая BL вторично пересекает ω_A в точке P, а прямая AK вторично пересекает ω_B в точке Q. Заметим, что так как $\angle ACB=90°$, то CB и CA являются касательными к ω_A и ω_B, проведенными в точке C.

Пусть E – вторая (отличная от C) точка пересечения окружностей ω_A и ω_B. Очевидно, E лежит на прямой CD (E симметрична точке C относительно прямой AB).

Далее многократно используем теорему о произведении отрезков секущих. Имеем $BK^2=BC^2=BL\cdot BP$, откуда $\frac{BL}{BK}=\frac{BK}{BP}$. Значит, $\Delta BLK\sim\Delta BKP$, т.е. $\angle LKM=\angle LPK$. Аналогично получаем, что $\angle KLM=\angle KQL$.

Далее, $LX\cdot XP=CX\cdot CE$ и $KX\cdot XQ=CX\cdot CE$, откуда $LX\cdot XP=KX\cdot XQ$. Значит, четырехугольник $KLQP$ – вписанный, и, следовательно, $\angle LPK=\angle KQL$. Окончательно, $\angle LKM=\angle LPK=\angle KQL=\angle KLM$, т.е. в треугольнике MKL стороны MK и ML равны, что и требовалось доказать.

6 (*Л.Шабанов*).

Ответ: $n=4k+1$, $n=4k+2$, где $k\geq0$ – целое.

После приведения к общему знаменателю второе равенство принимает вид $\frac{1\cdot3^{b_1}+2\cdot3^{b_2}+\ldots+n\cdot3^{b_n}}{3^t}=1$, где b_i и t – целые неотрицательные числа. При $n=4k+3$ или $n=4k+4$ в числителе дроби ровно $2k+2$ нечетных слагаемых (каждое второе слагаемое четно). Значит, числитель дроби – четное число, а знаменатель – нечетное, поэтому дробь не может равняться 1.

При $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ приведем индуктивное построение примера. Для удобства позволим себе записывать выражения $\frac{1}{2^\infty}$ и $\frac{1}{3^\infty}$, полагая их равными 0. Рассматриваем бесконечную последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ такую, что каждое a_i либо равно ∞, либо равно целому неотрицательному числу (в таком случае пишем $a_i < \infty$), причем, начиная с некоторого номера, все члены этой последовательности равны ∞. Такую последовательность назовем *подходящей*, если сумма $S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_i}}$ равна 1 и сумма $S_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^{a_i}}$ равна 1. Подходящую последовательность назовем *n-подходящей*, если $a_1, a_2, \ldots, a_n < \infty$ и $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = \infty$. Тогда переформулируем нашу цель так: для каждого n вида $4k+1$ и $4k+2$ нам нужно построить n-подходящую последовательность.

Нам понадобится перестраивать последовательности. Определим *перестройку* типа $(m, 2m)$ последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ так: если $a_m = x < \infty$, то заменяем a_m и a_{2m} соответственно на $x+1$ и $x+1$. При такой замене изменение суммы S_2 равно $\frac{1}{2^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+1}} - \frac{1}{2^x} = 0$, а изменение суммы S_3 равно $\frac{m}{3^{x+1}} + \frac{2m}{3^{x+1}} - \frac{m}{3^x} = 0$.

Определим *перестройку* типа $(m, 3m-t, 3m+t)$ последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ так: если $a_m = x < \infty$ и $a_{3m-t} = a_{3m+t} = \infty$, то заменяем a_m, a_{3m-t}, a_{3m+t} соответственно на $x+1$, $x+2$, $x+2$. При такой замене изменение суммы S_2 равно $\frac{1}{2^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+2}} + \frac{1}{2^{x+2}} - \frac{1}{2^x} = 0$, а изменение суммы S_3 равно $\frac{1}{3^{x+1}} + \frac{3m-t}{3^{x+2}} + \frac{3m+t}{3^{x+2}} - \frac{m}{3^x} = 0$. Как мы видели, наши перестройки не меняют значений сумм S_2 и S_3. Поэтому, выполняя перестройку подходящей последовательности, мы снова получим подходящую последовательность.

а) Пусть имеется $(12m-3)$-подходящая последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$. С ней можно последовательно сделать перестройки $(6m-1, 12m-2)$, $(6m, 12m)$ и $(4m, 12m-1, 12m+1)$, в результате получим $(12m+1)$-подходящую последовательность.

б) Пусть имеется $(12m-11)$-подходящая последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$. Покажем, как из нее получить $(12m-3)$-подходящую последовательность.

При $m = 1$ достаточно последовательно выполнить перестройки (1, 2), (2, 3, 9), (2, 5, 7), (2, 4), (3, 6), (4, 8).

Пусть $m \ge 2$, тогда $4m-2 < 12m-11$, и, значит, $a_{4m-2} < \infty$. Выполняя перестройки $(4m-2, 12m-9, 12m-3)$ и $(4m-2, 12m-7, 12m-5)$, добиваемся того, что $a_i < \infty$ для всех нечетных $i \le 12m-3$. После этого выполняем последовательно перестройки типа $(s, 2s)$ для $s = 6m-5$, $6m-4$, $6m-3$, $6m-2$ и получаем требуемое.

Выполняя переходы б) и а), начиная с 1-подходящей последовательности $(0, \infty, \infty, \ldots)$, получим n-подходящие последовательности для всех n, дающих остаток 1 или 9 при делении на 12.

в) Пусть имеется $(12m-7)$-подходящая последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$. Покажем, как из нее получить $(12m+5)$-подходящую последовательность. Выполняя последовательно перестройки $(4m, 12m-1, 12m+1)$, $(4m, 12m-3, 12m+3)$, $(4m, 12m-5, 12m+5)$ (это возможно, так как $4m < 12m-7$, и, значит, $a_{4m} < \infty$) и затем перестройки типа $(s, 2s)$ для $s = 6m-3$, $6m-2$, …, $6m+2$, получаем требуемое.

Легко проверить, что $(2, 1, 3, 4, 4, \infty, \infty, \ldots)$ – 5-подходящая последовательность. Выполняя переходы в), начиная с нее получим n-подходящие последовательности для всех n, дающих остаток 5 при делении на 12.

Итак, мы научились строить n-подходящие последовательности для всех n вида $4k+1$.

г) Наконец, $(4k+2)$-подходящая последовательность может быть получена из $(4k+1)$-подходящей последовательности перестройкой $(2k+1, 4k+2)$.

XLIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

ЗАДАЧА 1

Часть А

1. $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, $k = \frac{g}{2v_0^2}$.

2. Оптимальная траектория в какой-то точке касается сферы.

3. $v_{\min} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}$.

Часть Б

1. $v_P = 23$ м/с.

2. Точка Q находится в месте, где скорость воздуха в системе координат самолета максимальна и расстояние между линиями тока минимально.

3. $v_{\text{кр}} \approx 28$ м/с.

Часть В

1. Внутри сверхпроводящей трубки линии магнитного поля параллельны оси трубки, а снаружи они замыкаются, как у соленоида.

2. $T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}$. **3.** $F = \frac{4-\sqrt{2}}{8\mu_0\pi}\frac{\Phi^2}{l^2}$.

ЗАДАЧА 2

Часть А

1. $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}$. **2.** $Q = 4\pi\varepsilon_0\varphi r$. **3.** $\varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}}$.

Часть Б

1. $Q_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 q r_{\max}}{C}$. **2.** $q = q_0 e^{\delta t}$, где $\delta = \frac{\pi\varepsilon_0 n}{C}\sqrt[3]{\frac{6\sigma d}{\rho g}}$.

3. $U_{\max} = \sqrt[6]{\frac{H^3 g\sigma^2\rho d^2}{6\varepsilon_0^3}}$.

ЗАДАЧА 3

1. $n = 8$. **2.** $t_2 \approx \sqrt{\frac{0,1 r_0^3}{Gm}}$. **3.** $t_{r\to 0} = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$.

4. $Q = \frac{3mRT_0}{\text{M}}\ln\frac{r_0}{r_3}$. **5.** $T = T_0\left(\frac{r_3}{r}\right)^{3\gamma-3}$.

6. $r_4 \approx r_3\left(\frac{RT_0 r_3}{\text{M}mG}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}$, $T_4 \approx T_0\left(\frac{RT_0 r_3}{\text{M}mG}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$.

ВЫБОР ПЕРИОДИЧНОСТИ, ПЕРИОДИЧНОСТЬ ВЫБОРА...

(см. «Квант» №4)

1. Рассмотрим случай $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Возьмем такое целое отрицательное n, что $n < -\frac{T_2}{T_1}$. Имеем $nT_1 + T_2 < 0$. Мы показали, что равенство $\left|nT_1 + T_2\right| = \left|nT_1\right| + \left|T_2\right|$ должно выполняться для любого целого n. Раскрывая модули, получаем

$$-\left(nT_1 + T_2\right) = -nT_1 + T_2 .$$

Тогда $T_2 = 0$. Противоречие.

3. Нет.

Проведите рассуждения, как в разделе I, и получите равенство $a^{T_1+T_2} = a^{T_1} + a^{T_2} - 1$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда $\left(a^{T_1} - 1\right)\left(a^{T_2} - 1\right) = 0$, что невозможно для $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$.

4. Если взять функцию из раздела IV

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x - \text{ не рациональное, т.е. } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1, \text{ если } x = 0, \\ n, \text{ если } x = \pm m/n,\ n, m \in \mathbb{N};\ \text{НОД}(m;n) = 1, \end{cases}$$

то тогда в качестве периодической функции, не ограниченной на любом интервале, можно взять функцию

$$g(x) = f(x) - f\left(x - \sqrt{2}\right).$$

5. а) Можно.

Представим x в виде $x = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ – периодическая функция с периодом 1, а $h(x)$ – периодическая функция с периодом 2π. Тогда для $f(x)$ получаем представление

$$f(x) = x + \sin x = g(x) + \left(h(x) + \sin x\right).$$

б) Можно.

Функция $f(x) = [x] = x - \{x\}$, где $\{x\}$ – дробная часть числа x, будет периодической с периодом 1. Возьмем функции $g(x), h(x)$, чтобы выполнялось равенство $x = g(x) + h(x)$. Тогда получим представление

$$f(x) = [x] = x - \{x\} = \left(g(x) - \{x\}\right) + h(x).$$

6. Можно.

Представим $x = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ – периодическая функция с периодом T_1, а $h(x)$ – периодическая функция с периодом T_2, причем T_1 и T_2 несоизмеримы. Тогда $f(x) = a^x = a^{g(x)} \cdot a^{h(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$, есть представление функции в виде произведения двух периодических функций.

НАПЕЧАТАНО В 2012 ГОДУ

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, В.А.Пяткин, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова, Л.А.Широнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

Будет ли разгадана загадка шахмат?

В прошлом номере «Кванта» мы рассказали о достижениях компьютеров в анализе позиций с небольшим числом фигур (до пяти). При увеличении их числа возникают серьезные технические трудности, связанные с объемом памяти и быстродействием машины, но они постепенно преодолеваются.

Остановимся на некоторых семифигурных окончаниях (с пешками), в анализе которых преуспели программисты Марк Буржуцкий (США) и Яков Коновал (Россия). С 2005 года, общаясь друг с другом по скайпу и электронной почте, они с помощью компьютера получили ряд весьма интересных результатов, некоторые из них важны для теории и практики.

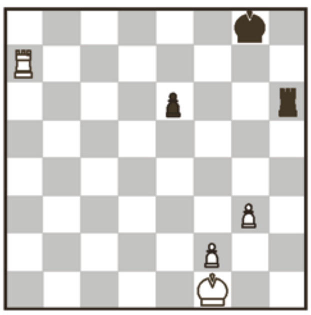
Ферзь и две пешки против ферзя и пешки. Это окончание отличается большой сложностью ввиду подвижности ферзей и многочисленных шахов. Для выигрыша с двумя пешками против одной рекорд составляет 222 хода. Но и слабейшая сторона нередко берет вверх (пешка оказывается сильнее двух), здесь рекорд 105 ходов (имеется в виду переход в выигранный младший эндшпиль). Вот пример (Лотье – Пикет, Дортмунд, 1995).

Белые: ♔a2, ♕c4, ♙a3, ♙b2. Черные: ♔g6, ♕g7, ♙a7.

Позиция выиграна за белых. Черные сыграли **47...♔f5**, пропуская белого короля на b3 и тем самым ускоряя развязку. В комментариях предлагалось 47...♕b7. Теперь найти выигрыш без эндшпильной базы практически невозможно, но он есть, причем составляет 93 хода, из которых многие единственные.

Ладья и две пешки против ладьи и пешки. Это окончание часто встречается на практике и вполне под силу шахматисту, тем не менее количество ошибок, неверных оценок велико. Рекорды выигрыша здесь 79 ходов в случае двух пешек против одной и 41 ход – одна пешка против двух. Рассмотрим два примера из практики.

Компьютер установил, что эта позиция (Пинтер – Портиш, Венгрия, 1998) ничейна. Однако после **56. ♔g2** черные тут же ошиблись – **56...♔f8?**, что проигрывает в 44 хода. Ничью давало 56...♖h5 или 56...♖f6. **57. g4! ♖h4 58. f3 ♖h6 59. ♔g3 ♖f6 60. ♖b7 ♔e8 61. ♔f2?** Обе стороны играют не оптимально, а этот ход просто упускает победу, правильно было 61. f4. **61...♖f4! 62. ♔g3 ♖f6?** Очередь черных ошибаться – после 62...♖a4 (c4, d4) они добивались ничьей. **63. f4**, и белые взяли верх.



Белые: ♔h3, ♖a5, ♙a2, ♙f4. Черные: ♔d6, ♖g8, ♙a7.

В этой позиции (Ананд – Широв, Вейк-ан-Зее, 2004) белые сыграли 37. f5, что должно было привести к ничьей, не меняет дела и 37. ♖:a7. Машина же указала тонкий выигрыш: **37. ♖e5!! ♖g4 38. ♖e4! ♔d5 39. ♔h3!!** и т.д.

Слон и две пешки против слона и пешки. Легкофигурные окончания проще ферзевых и ладейных, но и здесь есть забавные примеры «непонимания». При одноцветных слонах рекорд – 78 ходов (две пешки против одной) и 38 ходов (одна против двух), при разноцветных 52 и 24 хода соответственно.

Белые: ♔c5, ♗a4, ♙a3, ♙d6. Черные: ♔f6, ♗e6, ♙f4.

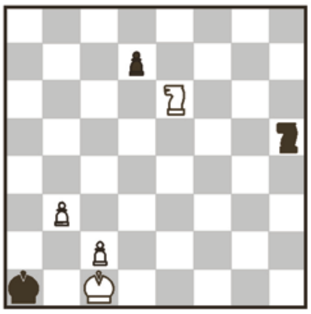
В данной позиции (Кузьмин – Буазис, Рига, 1979) черные играли точно – **68...f3! 69. ♗b5 f2! 70. ♔c6 ♔e5! 71. ♗f1**, но тут неожиданно... сдались. Компьютер осудил такое решение – **71...♔d4! 72. a4 ♗c4! 73. d7 ♗:f1 74. d8♕+ ♔e3** с простой ничьей.

Белые: ♔a1, ♗d6, ♙h6. Черные: ♔b3, ♗d3, ♙b4, ♙c6.

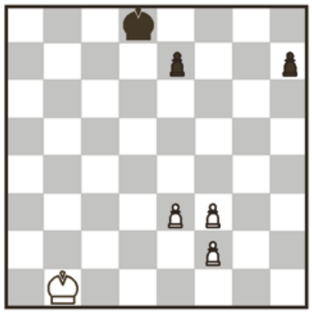
А в этом положении (Макарычев – Ронгкван, Белград, 1988) после **79...♗h7** вдруг сдались белые! Машина бы так не поступила: **80. ♗e7 ♔c3 81. ♔a2! b3+ 82. ♔a3 ♔c2 53. ♗f6 c5 84. ♗g7 c4 85. ♔b4! ♗d3 86. h7!**, форсируя ничью – **86...♗:h7 87. ♔:c4.**

Слон и две пешки против коня и пешки. Рекорды выигрыша 87 и 27 ходов соответственно.

Конь и две пешки против коня и пешки. Вот какую уникальную позицию обнаружил компьютер. Белые здесь выигрывают в 110 ходов.

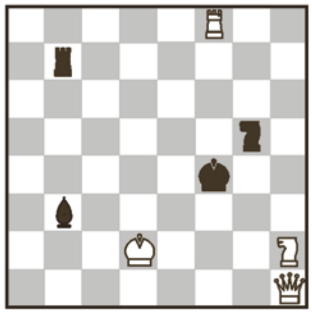


Три пешки против двух пешек. Пешечные окончания, как правило, поддаются точному расчету, однако немало ситуаций, когда без компьютера не обойтись. Вот рекордная позиция.



1. ♔c2! ♔e8 2. f4 ♔f7 3. ♔d3 ♔g6 4. ♔e4 ♔f6 5. ♔f3! ♔g6 6. ♔g4 e6 7. ♔g3! ♔g7 8. ♔f3! ♔f7 9. ♔e4 ♔f6 10. ♔d3! ♔g6 11. ♔c4 ♔f6 12. ♔c3! ♔g6 13. ♔d3! ♔f5 14. ♔d4! h6 15. ♔d3! ♔g4 16. ♔e2! ♔h5 17. ♔f3! ♔g6 18. ♔e4! ♔f6 19. ♔d3! ♔g6 20. ♔c4 ♔f6 21. ♔c3! ♔g6 22. ♔d3! ♔f5 23. ♔d4! h5 24. ♔d3! ♔g4 25. ♔e2 ♔h3 26. ♔f1! ♔h4 27. ♔g2! ♔g4 28. ♔h2! ♔f5 29. ♔h3 ♔g6 30. e4 ♔h7 31. ♔h4! ♔g6 32. f3! ♔h6 33. f5! e5 34. f6! ♔g6 35. f7! с победой.

Исследовали Коновал и Буржуцкий также окончания *ферзь и две легкие фигуры против ферзя и легкой фигуры, ладья и две легкие фигуры против ладьи и легкой фигуры* и др. И наконец, один суперфантастический результат для семифигурного окончания *ферзь и конь против ладьи, слона и коня.* С помощью машины дотошные программисты обнаружили настоящего монстра – позицию, в которой для выигрыша требуется более 500(!) ходов, только тогда белый ферзь забирает черную ладью. Вряд ли у читателя хватит терпения разыгрывать все эти полтысячи ходов, поэтому мы их и не приводим.



Да, остается только удивляться, что такое возможно в шахматах. А ведь Коновал и Буржуцкий уже взялись за восьмифигурные окончания, с помощью машины установили, в частности, что в общем случае четыре слона справляются с двумя ладьями, хотя для выигрыша нужно больше 50 ходов. Кто знает, может быть, лет через пятьдесят дело дойдет до 32 фигур на доске, и загадка шахмат будет полностью разгадана!

Е.Гик

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Как сосредоточиться на бегу?

Вести видеосъемку на бегу очень сложно. Стабилизировать изображение камеры помогает простое устройство...

(Продолжение — на странице 61 внутри журнала)